СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК519.85

PHI-ФУНКЦИИ ДЛЯ ЭЛЛИПСОВ, АППРОКСИМИРОВАННЫХ ДУГАМИ ОКРУЖНОСТЕЙ

ПАНКРАТОВ А.В.

Рассматривается задача оптимальной упаковки аппроксимированных дунами окружностей эллипсов, допускающих непрерывные вращения. Для аналитического описания основных ограничений размещения предлагаются свободные от радикалов phi-функции, имеющие существенно более простую форму записи и меньшую вычислительную сложность, чем известные аналоги.

Ключевые слова: раскрой и упаковка, эллипсы, аппроксимация, phi-функция.

Key words: cutting and packing, ellipses, approximation, phi-function.

Введение

Задачи упаковки и раскроя, называемые также задачами оптимального размещения [1–2], относятся к классу NP-сложных задач [3] и являются частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Задачи размещения имеют широкий спектр научных и практических применений, в том числе в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

Предметом данного исследования является задача упаковки набора эллипсов $\widehat{E}_i$, $i \in \{1,2,...,n\} = I_n$ в прямоугольник $\Omega = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le l, 0 \le y \le w\}$ с переменными длиной l и шириной w. Каждый эллипс $\widehat{E}_i$ задан парой чисел a_i и b_i – длиной большой и малой полуосей a_i и b_i. Полагаем, что начало собственной системы координат эллипса $\widehat{E}_i$ совпадает с его центром симметрии. Положение эллипса $\widehat{E}_i$ характеризуется вектором трансляции (x_i, y_i) и углом поворота u_i.

Задача упаковки эллипсов. Необходимо разместить множество эллипсов $\widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i \in I_n$, в контейнере Ω так, чтобы площадь $F = l \cdot w$ была минимальной.

1. Исследование состояния проблемы

Обзор публикаций [4–5] по этой тематике дает возможность сделать вывод о том, что только в работе [6] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. В этой статье приводится подробный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. Для построения условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную ранее в работе [7] для моделирования отношений непересечения кругов и выпуклых многоугольников. В [6] получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ($n \le 4$). Однако при n>14 авторам не удалось получить допустимого решения. В этой связи авторы предложили эвристический *polylithic*-алгоритм для размещения бо́льшего числа эллипсов ($n \le 100$) в прямоугольной области.

Подход, основанный на описании отношений непересечения между эллипсами при помощи свободных от радикалов квази-phi-функций, предложен в [8] и реализован в [9]. В результате удалось представить задачу оптимальной упаковки эллипсов в виде задачи нелинейного программирования и получить локально-оптимальные решения при $n \le 120$, улучшив результаты по времени и значению функции цели для многих примеров ($5 \le n \le 100$), приведенных в [6].

Однако подходы, предложенные в [6] и [9], являются довольно ресурсоемкими, причем время решения растет экспоненциально с ростом числа размещаемых эллипсов.

В работах [10, 11] предложено использовать свободные от радикалов phi-функции, приведенные в [12], при моделировании отношений для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что приближенное решение получается за значительно меньшее количество времени, чем требуется для получения точного решения, и при этом незначительно отличается в худшую сторону от точного решения по значению функции цели. Помимо того, что полученное за разумное время достаточно хорошее приближенное решение задачи упаковки эллипсов представляет самостоятельный практический интерес, оно может быть также использовано в качестве допустимой стартовой точки для локальной оптимизации. Комбинированный подход позволяет получать локально-оптимальные решения за меньшее количество времени, чем применение «чистых» методов локальной оптимизации [13].

Для решения задачи упаковки эллипсов в [13] использована универсальная методология, предложенная для задач оптимального размещения двумерных геометрических объектов. В соответствии с указанной методологией размещаемые объекты представляются в виде объединения объектов четырех видов из класса $\Im$ базовых объектов. Всего в класс $\Im$ входят объекты четырех типов – выпуклый многоугольник K, сегмент круга D, «шапочка» H и «рог» V. В [10] доказано, что произвольный ограниченный объект, граница которого сформирована отрезками прямых и дугами окружностей, может быть представлен в виде объединения базовых объектов. Для удобства используются также вспомогательный объект круг C (который может быть представлен в виде объединения двух сегментов). Для моделирования неограниченных объектов используется также полуплоскость P. Геометрические отношения между каждой парой объектов описываются посредством зависящей от параметров размещения phi-функции, которая представляет собой минимум phi-функций для всех пар базовых объектов, формирующих исходные.

Разработанный на основе теории phi-функций генератор пространства решений задачи позволяет свести решение произвольной задачи размещения двумерных геометрических объектов к решению последовательности задач нелинейного программирования.

Изложенный универсальный подход прекрасно себя зарекомендовал на решении ряда тестовых задач. Однако платой за универсальность является повышенный расход вычислительных ресурсов. В этой связи остается актуальной разработка специализированных phi-функций для имеющих особую практическую значимость классов объектов в целях снижения вычислительных затрат. Разработке phi-функций для одного из таких классов объектов, эллипсов и посвящена данная работа.

2. Phi-функции для аппроксимированных дугами окружностей эллипсов

Пусть имеется эллипс $\hat{E}$, заданный большой полуосью a и малой полуосью b с переменными параметрами размещения $u=(x,y,\theta)$. Построим на границе эллипса точки v_1, v_2, v_3 и v_4 (рис. 1,а) с координатами

$$v_1=(-b'r-d,a'r),\ \ v_2=(b'r+d,a'r),$$

$$v_3=(-b'r-d,-a'r),\ \ v_4=(b'r+d,-a'r),$$

где $r=a-d$, $d=\dfrac{(a-b)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}{2a}$,

$$a'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ b'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Построим внешнюю аппроксимацию эллипса $\hat{E}$ объектом минимальной площади, ограниченным дугами окружностей с вершинами в точках v_1, v_2, v_3, v_4 [13]. При этом меньшие дуги принадлежат окружностям C_1 и C_2 радиуса $r=a-d$ с центрами в точках $(\mp t,0)$, а большие – окружностям C_3 и C_4 радиуса $R=b+\dfrac{a}{b}d$ с центрами в точках $(0,\mp\dfrac{a}{b}d)$ (рис. 1,б).

В соответствии с реализованным универсальным подходом к решению задач размещения аппроксимированный объект E представляется в виде объединения пяти базовых объектов (рис. 1,в):

$$E=C_1\cup C_2\cup D_1\cup D_2\cup K. \tag{1}$$

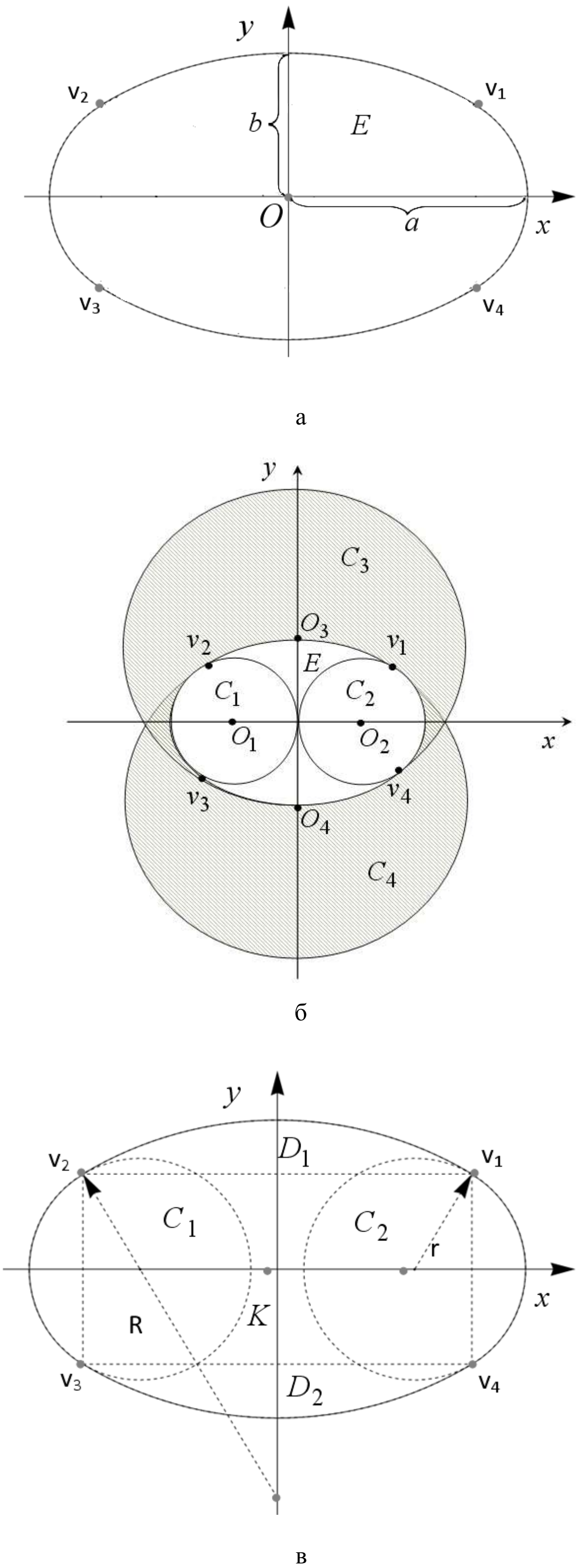


Рис. 1. Функции для аппроксимированных эллипсов: а– эллипс со вспомогательными точками на границе; б – аппроксимация эллипса дугами; в – представление аппроксимированного эллипса в виде объединения базовых объектов

С учетом (1) phi-функция для объекта E и полуплоскости P имеет вид

$$\Phi^{EP} = \min\left\{\Phi^{C_1P}, \Phi^{C_2P}, \Phi^{D_1P}, \Phi^{D_2P}, \Phi^{K\,P}\right\}. \qquad (2)$$

Функция, используемая для формализации условия принадлежности аппроксимированного эллипса прямоугольному контейнеру, описывается минимумом из четырех функций вида (2).

Для эллипсов E^i и E^j приближенная phi-функция определяется в виде

$$\Phi^{E^iE^j} = \min\left\{\Phi^{C_1^iE^j}, \Phi^{C_2^iE^j}, \Phi^{D_1^iE^j}, \Phi^{D_2^iE^j}, \Phi^{K^iE^j}\right\}, \qquad (3)$$

где $\Phi^{TE^j} = \min\left\{\Phi^{TC_1^j}, \Phi^{TC_2^j}, \Phi^{TD_1^j}, \Phi^{TD_2^j}, \Phi^{TK^j}\right\}$,

$$T \in \Im = \{C_1^i, C_2^i, D_1^i, D_2^i, K^i\}.$$

Для дальнейшего использования выражения (2) и (3) необходимо преобразовать к эквивалентному виду

$$\Phi = \max_{i=1,\dots,m} f_i = \max_{i=1,\dots,m}\ \min_{j=1,\dots,n_i} f_{ij}. \qquad (4)$$

Из исследования построенных в настоящее время phi-функций и полученных в [11] оценок числа вершин дерева решения задачи размещения следует, что для выражения (2), преобразованного к форме представления (4), $m = 4$, минимальное из n_i равно 8, максимальное – 12, а в выражении вида (4), эквивалентного выражению (3), $m \approx 3.6926650668859E17$, минимальное из n_i равно 62, а максимальное – 124. При этом следует отметить, что большинство из неравенств $f_i \ge 0$ из выражения (4) описывает пустые множества.

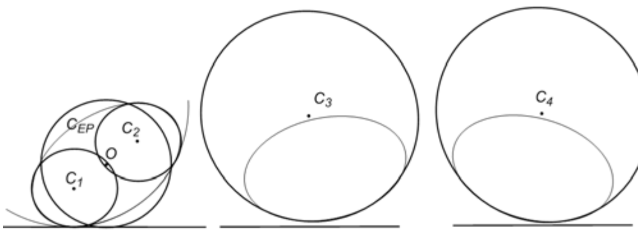
Предлагается phi-функция объекта E и полуплоскости P в виде максимума трех функций

$$\Phi^{EP} = \max\{\Phi^{LP}, \Phi^{C_3P}, \Phi^{C_4P}\}, \qquad (5)$$

где $\Phi^{LP} = \min\{\Phi^{C_1P}, \Phi^{C_2P}, \Phi^{C_{EP}P}\}$, $L = C_1 \cup C_2 \cup C_{EP}$, $E \subset L$, C_1, C_2, C_3 и C_4 – круги, содержащие дуги, C_{EP} – круг радиуса

$$r_p = r + b'd \qquad (6)$$

с центром в точке O (рис. 2).



а б в

Рис. 2. Варианты взаимного размещения плоскости и эллипса: а – $\Phi^{LP} \ge 0$; б – $\Phi^{C_3P} \ge 0$; в – $\Phi^{C_4P} \ge 0$

Круг C_{EP} по способу построения содержит большие дуги и может касаться линии, ограничивающей полуплоскость P одновременно с одной из точек v_1, v_2, v_3 или v_4.

Построенная функция (5) имеет вид (4), для нее $m = 3$, $\min\limits_{i=1,2,3} n_i = 1$, $\max\limits_{i=1,2,3} n_i = 3$.

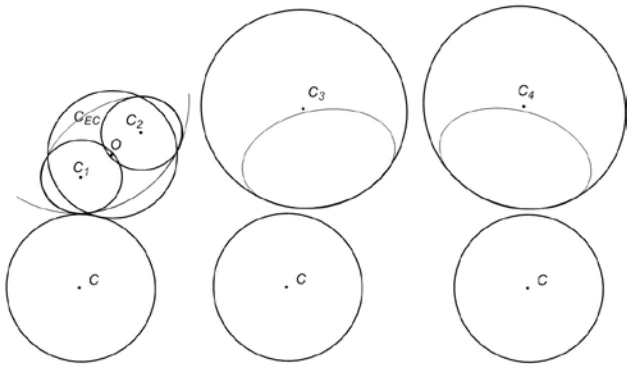
Phi-функция объекта E и круга C радиуса R строится подобным образом (рис. 3):

$$\Phi^{EC} = \max\{\Phi^{MC}, \Phi^{C_3C}, \Phi^{C_4C}\}, \qquad (7)$$

где

$$\Phi^{MC} = \min\{\Phi^{C_1C}, \Phi^{C_2C}, \Phi^{C_{EC}C}\}, \qquad (8)$$

$M = C_1 \cup C_2 \cup C_{CP}$, $E \subset M$, C_1, C_2, C_3 и C_4 – круги, содержащие дуги (см. рис 1,б), C_{EC} – круг радиуса $r_R = \sqrt{(R+r_1)(R+2r_p-r_1)+d^2} - R$ с центром в точке O (см. рис. 3), где величина r_p определяется выражением (6). Круг C_{EC} по способу построения содержит большие дуги и может касаться окружности C одновременно с одной из точек v_1, v_2, v_3 или v_4. Полученная функция имеет вид (4), при этом $m = 3$, $\min\limits_{i=1,2,3} n_i = 1$, $\max\limits_{i=1,2,3} n_i = 3$.



а б в

Рис. 3. Варианты взаимного размещения круга и эллипса: а – $\Phi^{MC} \ge 0$; б – $\Phi^{C_3C} \ge 0$; в – $\Phi^{C_4C} \ge 0$

Phi-функцию двух аппроксимированных эллипсов E^i и E^j предлагается строить как максимум из пяти функций (рис. 4):

$$\Phi^{E^iE^j} = \max\{\Phi^{E^iC_3^j}, \Phi^{E^iC_4^j}, \Phi^{C_3^iM^j}, \Phi^{C_4^iM^j}, f^{N^iN^j}\}, \qquad (9)$$

где $\Phi^{E^iC_3^j}, \Phi^{E^iC_4^j}$ – функции вида (7); $\Phi^{C_3^iM^j}, \Phi^{C_4^iM^j}$ – функции вида (8),

$$f^{N^iN^j} = \min\{\Phi^{M^jC_1^i}, \Phi^{M^jC_2^i}, \Phi^{M^iC_1^j}, \Phi^{M^iC_2^j}, f^{ij}\}, \qquad (10)$$

$\Phi^{M^jC_1^i}, \Phi^{M^jC_2^i}, \Phi^{M^iC_1^j}, \Phi^{M^iC_2^j}$ – функции вида (8), построенные для объектов $M^i(M^j)$ и кругов C_1^j, C_2^j, (C_1^i, C_2^i),

$d^{ij} = \sqrt{\left(a_i'd_i - a_j'd_j\right)^2 + \left(r_i + b_i'd_i + r_j + b_j'd_j\right)^2}$.

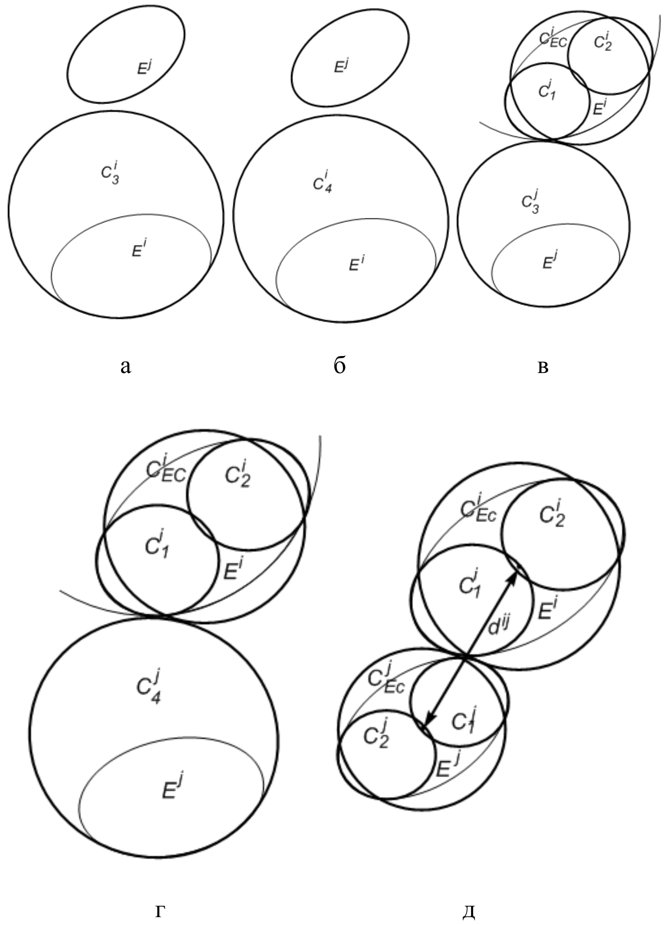


Рис. 4. Варианты взаимного размещения двух эллипсов: а – $\Phi^{E^iC_3^j} \ge 0$; б – $\Phi^{E^iC_4^j} \ge 0$; в – $\Phi^{E^iC_3^j} \ge 0$; г – $\Phi^{E^iC_4^j} \ge 0$, д – $f^{N^iN^j} \ge 0$

Функция (10) может быть оптимизирована и переписана как

$$f^{N^iN^j} = \min\{\Phi^{C_1^iC_1^j}, \Phi^{C_1^iC_2^j}, \Phi^{C_2^iC_1^j}, \Phi^{C_2^iC_2^j}, \Phi^{C_1^iC_{Ec}^j}, \Phi^{C_2^iC_{Ec}^j}, \Phi^{C_1^jC_{Ec}^i}, \Phi^{C_2^jC_{Ec}^i}, f^{ij}\}.$$

Функция (9) после преобразования к виду (4) записывается следующим образом:

$$\Phi^{E^iE^j} = \max\{\Phi^{C_3^iC_3^j}, \Phi^{C_3^iC_4^j}, \Phi^{C_4^iC_3^j}, \Phi^{C_4^iC_4^j}, \Phi^{C_3^iM^j}, \Phi^{C_4^iM^j}, \Phi^{C_3^jM^i}, \Phi^{C_4^jM^i}, f^{N^iN^j}\} \quad (11)$$

Соответственно, $m = 3$, $\min\limits_{i=1,2,3} n_i = 1$, $\max\limits_{i=1,2,3} n_i = 9$, причем максимальное значение достигается для единственной функции $f^{N^iN^j}$, для остальных функций количество неравенств под знаком минимума не превышает трех.

Выводы

Предложенный вариант phi-функций для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей, имеет намного более простую форму записи и требует меньших вычислительных затрат, чем вариант phi-функций, формируемый в рамках универсального подхода.

Литература: 1. *Wascher G., Hauner H. and Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. 2007. Volume 183, Issue 3, 16. P. 1109-1130. **2.** *Bennell J.A. and Oliveira J. F.* The geometry of nesting problems: A tutorial // European J. Operational Research. 2008. 184. P. 397-415. **3.** *Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L.J.* The complexity of cutting complexes // Discrete & Computational Geometry. 1989. 4(2), P. 139-181. **4.** *Birgin E.G., Bustamante L.H., Callisaya H.F., Martэnez, J.M.* Packing circles within ellipses // International transactions in operational research. 2013. № 20. P. 365–389. **5.** *Xu W.X., Chen H.S., Lv Z.* An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles// Physica. 2011. A. 390. P. 245-267. **6.** *Kallrath J. and Rebennack S.* Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles. // Journal of Global Optimization. 2013. DOI10.1007/s10898-013-0125-3. **7.** *Kallrath, J.* Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles. // Journal of Global Optimization. 2009. 43. P. 299–328. **8.** *Stojan Ju.G., Pankratov A.V., Romanova T.E., Chernov N.I.* Kvazi-phi-funkcii dlja matematicheskogo modelirovanija otnoshenij geometricheskih ob#ektov // Dopovidi Nacional’noï akademiï nauk Ukraïni. 2014. № 9. P. 49-54. **9.** *Pankratov A., Romanova T. Subbota I.* Optimal’naja upakovka jellipsov s uchetom dopustimyh rasstojanij. // Zhurnal obisljuval’noï ta prikladnoï matmatiki. 2014. 1. P. 129-140. **10.** *Chernov N, Stoyan Y, Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. 2010. 43(5). P. 535-553. **11.** *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A.* Optimal clustering of a pair of irregular objects // Journal of Global Optimisation, March 2015, Volume 61, Issue 3. P. 497-524. **12.** *Chernov N. , Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A.* Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // Advances in Operations Research. 2012. Vol. Article ID 346358. 26 pages. doi:10.1155/2012/346358. **13.** *Pankratov A.V., Romanova T.E., Subbota I.A.* Razrabotka jeffektivnyh algoritmov optimal’noj upakovki jellipsov // Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. 2014. 5/4(71). P. 28-35.

Поступила в редколлегию 17.05.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Романова Т.Е.

Панкратов Александр Викторович, д-р техн. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Научные интересы: задачи раскроя и упаковки, нелинейная оптимизация, исследование операций. Адрес: Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10, тел. (057)3494777.