СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК519.85

ПСЕВДОНОРМАЛИЗОВАННЫЕ КВАЗИ-PHI-ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ

ПАНКРАТОВ А.В., РОМАНОВА Т.Е., СТОЯН Ю.Е.

Предлагаются конструктивные средства математического моделирования для задач оптимальной упаковки в общем случае невыпуклых многогранников. В целях аналитического описания ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния между многогранниками, допускающими непрерывные повороты и трансляции, строятся псевдонормализованные квази-phi-функции.

Ключевые слова – невыпуклые многогранники, непрерывные вращения, непересечение, допустимые расстояния, квази-phi-функции.

Введение

Задачи упаковки и раскроя (Cutting and Packing) относятся к классу NP-сложных и являются предметом исследования вычислительной геометрии, а методы их решения – новым направлением теории исследования операций. В данной работе рассматривается класс задач оптимальной упаковки многогранников, который имеет широкий спектр научных и практических применений, в частности, в машиностроении, материаловедении, химической промышленности и других. Многие публикации посвящены данной тематике, в которых, как правило, предлагаются эвристические подходы. Так, в статье Egeblad et al [1] излагается эффективный способ решения задачи упаковки многогранников внутри многогранного контейнера. Основная идея метода заключается в точной одномерной трансляции заданного многогранника в положение, которое минимизирует его объем пересечения со всеми другими многогранниками. Авторы статьи Liu et al [2] предлагают новый эвристический алгоритм HAPE3D, основанный на принципе минимальной общей потенциальной энергии для задачи 3D упаковки невыпуклых многогранников в прямоугольном параллелепипеде фиксированной ширины и длины, но переменной высоты.

Одной из важных проблем, которые возникают при математическом моделировании данного класса задач, является аналитическое описание ограничений на заданные минимально и максимально допустимые расстояния между произвольными многогранниками, допускающими непрерывные повороты и трансляции. Как известно, наиболее мощным средством математического моделирования в классе задач упаковки и раскроя является метод phi-функций [7]. В работах в [3, 4] приводятся phi-функции для некоторых видов 3D-объектов, допускающих непрерывные вращения, таких как прямоугольные параллелепипеды и выпуклые многогранники. Однако на данный момент построить phi-функции для произвольных многогранников не удалось. Кроме того, открытым остается вопрос моделирования ограничений на минимально и максимально допустимые расстояния между парой произвольных многогранников.

В данном исследовании в целях аналитического описания обозначенных выше ограничений используется класс квази-phi-функций [5].

Постановка задачи

Пусть имеются два невыпуклых многогранника Q_q и Q_g (рис. 1).

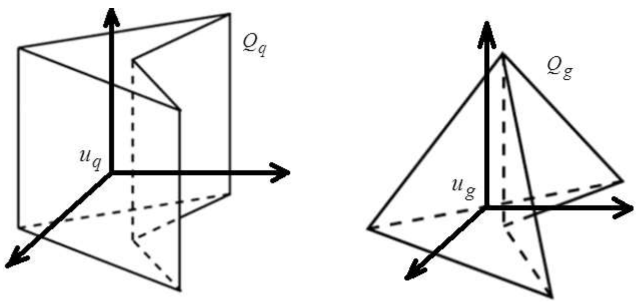

Рис. 1. Невыпуклые многогранники Q_q и Q_g

Положение и ориентация каждого многогранника Q_q и Q_g определяется вектором его переменных параметров размещения $u_q = (v_q, \theta_q)$ и $u_g = (v_g, \theta_g)$ соответственно. Здесь $v = (x, y, z)$ – вектор трансляции, $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ – вектор угловых параметров, где $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ – углы поворота от оси *OX* до оси *OY*, от *OY* до *OZ* и от *OX* до *OZ* соответственно, относительно неподвижной системы координат.

Многогранник Q, транслированный на вектор v и повернутый на углы $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, обозначим как $Q(u) = \{p \in R^3 : p = v + M(\theta) \cdot p^0, \forall p^0 \in Q^0\}$, где Q^0 обозначает нетранслированный и не повернутый многогранник Q, $M(\theta) = M_3(\theta^3) \cdot M_2(\theta^2) \cdot M_1(\theta^1)$ – матрица поворота, где

$$M_1(\theta^1) = \begin{pmatrix} \cos\theta^1 & -\sin\theta^1 & 0 \\ \sin\theta^1 & \cos\theta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2(\theta^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta^2 & -\sin\theta^2 \\ 0 & \sin\theta^2 & \cos\theta^2 \end{pmatrix},$$

$$M_3(\theta^3) = \begin{pmatrix} \cos\theta^3 & 0 & \sin\theta^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta^3 & 0 & \cos\theta^3 \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что невыпуклые многогранники Q_q и Q_g представлены в виде

$$Q_q(u_q) = \bigcup_{i=1}^{n_q} K_i(u_q), \quad Q_g(u_g) = \bigcup_{j=1}^{n_g} K_j(u_g),$$

где $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$ – выпуклые многогранники, заданные вершинами v_k^i, $k = 1,\dots,m_i$, и v_k^j, $k = 1,\dots,m_j$, в собственных системах координат невыпуклых многогранников Q_q и Q_g, соответственно (рис. 2).

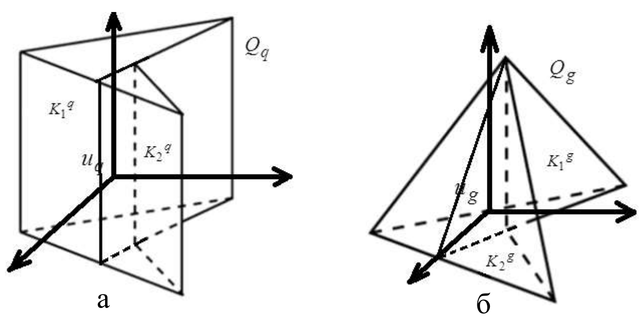

Рис. 2. Пример декомпозиции невыпуклых многогранников Q_q и Q_g: а – $Q_q = K_{q1} \cup K_{q2}$; б – $Q_g = K_{g1} \cup K_{g2}$

Замечание. Задача декомпозиции невыпуклых многогранников на минимальное количество выпуклых многогранников сама по себе является NP-сложной, для решения которой могут быть использованы различные алгоритмы, например, алгоритм, предложенный в [6]. В пределах данного исследования полагаем, что декомпозиция невыпуклых многогранников на выпуклые многогранники – задана.

Как известно [5], квази-phi-функция для выпуклых многоугольников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$ имеет вид

$$\Phi'_{ij}(u_q, u_g, u_P) = \min\{\Phi_i(u_q, u_P), \Phi_j(u_g, u_P)\}, \quad (1)$$

где $\Phi_i(u_q, u_P) = \min\limits_{1 \le k \le m_i} \psi_P(p_k^i)$ – phi-функция для $K_i(u_q)$ и полупространства $P(u_P)$, $\Phi_j(u_g, u_P) = \min\limits_{1 \le k \le m_j} (-\psi_P(p_k^j))$ – phi-функция для $K_j(u_g)$ и полупространства $P^*(u_P) = R^3 \setminus \operatorname{int} P(u_P)$, $P(u_P) = \{(x,y,z) \in R^3 : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_P \le 0\}$, $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$, θ_{xP} и θ_{yP} – соответствующие переменные углы поворота полупространства $P(u_P)$ от оси *OY* до *OZ* и от оси *OX* до *OZ* в фиксированной системе координат, $\alpha = \sin\theta_{yP}$, $\beta = -\sin\theta_{xP} \cdot \cos\theta_{yP}$, $\gamma = \cos\theta_{xP} \cdot \cos\theta_{yP}$ (рис. 3). Отметим, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

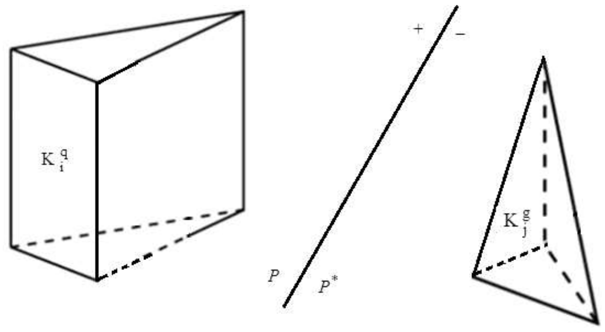

Рис. 3. Многогранники K_i^q, K_j^g и разделяющая их плоскость

Утверждение 1. Функция вида

$$\Phi'_{qg}(u_q, u_g, u') =$$
$$= \min\{\Phi'_{ij}(u_q, u_g, u'_{ij}),\ i = 1,\dots,n_q, j = 1,\dots,n_g\} \quad (2)$$

является квази-phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g, где $\Phi'_{ij}(u_q, u_g, u'_{ij})$ – phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$ вида (1), $u'_{ij} = u_P$ (см. рис. 1).

Доказательство. Как следует из определения квази-phi-функции [5], функция $\Phi'_{qg}(u_q, u_g, u')$ является квази-phi-функцией для объектов Q_q и Q_g, если функция $\max\limits_{u'} \Phi'_{qg}(u_q, u_g, u')$ является phi-функцией для Q_q и Q_g. Покажем это.

Поскольку в каждой из функций $\Phi'_{ij}(u_q, u_g, u'_{ij})$ дополнительные переменные u'_{ij} являются независимыми для каждой пары (i, j), $i = 1,\dots,n_q, j = 1,\dots,n_g$, следовательно,

$$\max_{u'}\{\min\{\Phi'_{ij}(u_q, u_g, u'_{ij}), i = 1,\dots,n_q, j = 1,\dots,n_g\}\} =$$
$$= \min\{\max_{u'_{ij}} \Phi'_{ij}(u_q, u_g, u'_{ij}), i = 1,\dots,n_q, j = 1,\dots,n_g\} =$$
$$= \min\{\Phi_{ij}(u_q, u_g), i = 1,\dots,n_q, j = 1,\dots,n_g\},$$

где $\Phi_{ij}(u_q, u_g)$ – phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$, а

$\min\{\Phi_{ij}(u_q,u_g), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\}=\Phi_{qg}(u_q,u_g)$ – phi-функция для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g. Отсюда следует, что

$$\max_{u'}\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')=\Phi_{qg}(u_q,u_g).$$

Таким образом, функция $\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')$ является квази-phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g, а следовательно, выполняются следующие свойства:

1) $\max_{u'}\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')<0$,

если $\operatorname{int}Q_q(u_q)\bigcap\operatorname{int}Q_g(u_g)\neq\varnothing$,

2) $\max_{u'}\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')=0$,

если $\operatorname{int}Q_q(u_q)\bigcap\operatorname{int}Q_g(u_g)=\varnothing$

и $\operatorname{fr}Q_q(u_q)\bigcap\operatorname{fr}Q_g(u_g)\neq\varnothing$,

3) $\max_{u'}\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')>0$,

если $Q_q(u_q)\bigcap Q_g(u_g)=\varnothing$.

Используя свойства квази-phi-функций [5], условие непересечения многогранников Q_q и Q_g ($\operatorname{int}Q_q(u_q)\bigcap\operatorname{int}Q_g(u_g)=\varnothing$) можно описать в виде неравенства $\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')\geq 0$, где $\Phi'_{qg}(u_q,u_g,u')$ определяется формулой (2).

В случае, если между многогранниками Q_q и Q_g задано минимально допустимое расстояние $\rho^-_{qg}>0$, то ограничение $\operatorname{dist}(Q_q,Q_g)\geq\rho^-_{qg}$ может быть описано с помощью псевдонормализованной квази-phi-функции $\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')$, где $\operatorname{dist}(Q_q,Q_g)=\min_{a\in Q_q,b\in Q_g}\rho(a,b)$, $\rho(a,b)$ – евклидово расстояние между точками a,b.

Пусть $\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij})$ – псевдонормализованная квази-phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$ вида [5]

$$\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij})=\Phi'_{ij}(u_q,u_g,u_P)\ -0.5\rho^-_{qg},$$

где функция $\Phi'_{ij}(u_q,u_g,u_P)$ описывается формулой (1), а $u'_{ij}=u_P$.

Пусть $u'=(u'_{ij}, i=1,..,n_q, j=1,..,n_g)$.

Утверждение 2. Функция

$$\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')=\min\{\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij}),$$
$$i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\} \qquad (3)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g.

Доказательство. Как следует из определения псевдонормализованной квази-phi-функции [5], функция $\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')$ является псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов Q_q и Q_g, если функция $\max_{u'}\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')$ является псевдонормализованной phi-функцией для Q_q и Q_g [7]. Покажем это.

Поскольку в каждой из функций $\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij})$ дополнительные переменные u'_{ij} являются независимыми для каждой пары (i, j), $i=1,\dots,n_q$, $j=1,\dots,n_g$, следовательно,

$$\max_{u'}\{\min\{\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij}), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\}\}=$$
$$=\min\{\max_{u'_{ij}}\widehat{\Phi}'_{-ij}(u_q,u_g,u'_{ij}), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\}=$$
$$=\min\{\widehat{\Phi}_{-ij}(u_q,u_g), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\},$$

где $\widehat{\Phi}_{-ij}(u_q,u_g)$ – псевдонормализованная phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ [7] и $K_j(u_g)$, а $\min\{\widehat{\Phi}_{-ij}(u_q,u_g), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\}$ – псевдонормализованная phi-функция для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g. Отсюда следует, что

$$\max_{u'}\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')=$$
$$=\min\{\widehat{\Phi}_{-ij}(u_q,u_g), i=1,\dots,n_q, j=1,\dots,n_g\}=$$
$$=\widehat{\Phi}_{-qg}(u_q,u_g).$$

Таким образом, функция $\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')$ является псевдонормализованной квази-phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g, а следовательно, выполняются следующие свойства:

1) $\max_{u'}\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')>0$, если $\operatorname{dist}(Q_q,Q_g)>\rho^-_{qg}$,

2) $\max_{u'}\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')=0$, если $\operatorname{dist}(Q_q,Q_g)=\rho^-_{qg}$,

3) $\max_{u'}\widehat{\Phi}'_{-qg}(u_q,u_g,u')<0$, если $\operatorname{dist}(Q_q,Q_g)<\rho^-_{qg}$.

В случае, если между многогранниками Q_q и Q_g задано максимально допустимое расстояние $\rho^+_{qg} > 0$, то ограничение dist$(Q_q, Q_g) \geq \rho^+_{qg}$ можно описать с помощью псевдонормализованной квази-phi-функции $\widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$.

Прежде всего, определим функцию вида

$$\widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij} = (p_i, p_j)) =$$

$$= \min\{(\rho^+_{qg})^2 - \text{dist}^2(p_i, p_j), f_i(p_i), f_j(p_j)\}, \quad (4)$$

где

$$\text{dist}^2(p_i, p_j) = (x_{p_j} - x_{p_i})^2 + (y_{p_j} - y_{p_i})^2 + (z_{p_j} - z_{p_i})^2$$

$$f_i(p_i) = \min\{\chi'_{il}(p_i), l = 1, \ldots, t_i\},$$

$$f_j(p_j) = \min\{\chi'_{jl}(p_j), l = 1, \ldots, t_j\},$$

$p_i = (x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i}) \in R^3$, $p_j = (x_{p_j}, y_{p_j}, z_{p_j}) \in R^3$,

при этом $f_i(p_i) \geq 0$ ($f_j(p_j) \geq 0$), если $p_i \in K^q_i$ ($p_j \in K^g_j$) и $f_i(p_i) < 0$ ($f_j(p_j) < 0$) в противном случае, $\chi'_{il} = 0$ ($\chi'_{jl} = 0$) – уравнения плоскостей, содержащих соответствующие грани $l = 1, 2, \ldots, t_i$ ($l = 1, 2, \ldots, t_j$) выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$.

Утверждение 3. Функция $\widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij})$ вида (4) является псевдонормализованной квази-phi-функцией для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$.

Доказательство.

Поскольку выполняются свойства

1) $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u') > 0$, если dist$(K^q_i, K^g_j) < \rho^+_{qg}$,

2) $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') = 0$,

если dist$(K^q_i, K^g_j) = \rho^+_{qg}$,

3) $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') < 0$, если dist$(K^q_i, K^g_j) > \rho^+_{qg}$, то можно утверждать, что функция $\widehat{\Phi}_{+ij}(u_q, u_g)$ является псевдонормализованной phi-функцией для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$, а следовательно, функция $\widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij})$ вида (4) является псевдонормализованной квази-phi-функцией для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$.

Утверждение 4. Функция

$$\widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') = \max\{\widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij}),$$

$$i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\} \quad (5)$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g.

Доказательство. Как следует из определения псевдонормализованной квази-phi-функции [5], функция $\widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$ является псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов Q_q и Q_g, если функция $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$ является псевдонормализованной phi-функцией для объектов Q_q и Q_g [7]. Покажем это.

Поскольку в каждой из функций вида $\widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$ дополнительные переменные u'_{ij} являются независимыми для каждой пары (i, j), $i = 1, \ldots, n_q$, $j = 1, \ldots, n_g$, следовательно

$$\max_{u'}\{\max\{\widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij}), i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\}\} =$$

$$= \max\{\max_{u'_{ij}} \widehat{\Phi}'_{+ij}(u_q, u_g, u'_{ij}), i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\} =$$

$$= \max\{\widehat{\Phi}_{+ij}(u_q, u_g), i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\},$$

где $\widehat{\Phi}_{+ij}(u_q, u_g)$ – псевдонормализованная phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$, $\max\{\widehat{\Phi}_{+ij}(u_q, u_g), i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\}$ – псевдонормализованная phi-функция для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g. Отсюда следует, что

$$\max_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') =$$

$$= \max\{\widehat{\Phi}_{+ij}(u_q, u_g), i = 1, \ldots, n_q, j = 1, \ldots, n_g\} =$$

$$= \widehat{\Phi}_{+qg}(u_q, u_g).$$

Таким образом, функция $\widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$ является псевдонормализованной phi-функцией для невыпуклых многогранников Q_q и Q_g, а следовательно, выполняются свойства:

1) $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') > 0$, если dist$(Q_q, Q_g) < \rho^+_{qg}$,

2) $\max\limits_{u'} \widehat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') = 0$, если dist$(Q_q, Q_g) = \rho^+_{qg}$,

3) $\max\limits_{u'} \hat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') < 0$, если $\mathrm{dist}(Q_q, Q_g) > \rho^{+}_{qg}$.

Таким образом, используя свойства псевдонормализованных квази-phi-функций [5], ограничение на минимально допустимое расстояние между невыпуклыми многогранниками Q_q и Q_g, $\mathrm{dist}(Q_q, Q_g) \geq \rho^{-}_{qg}$, можно описать в виде неравенства $\hat{\Phi}'_{-qg}(u_q, u_g, u') \geq 0$, а ограничение на максимально допустимое расстояние, $\mathrm{dist}(Q_q, Q_g) \leq \rho^{+}_{qg}$, можно описать в виде неравенства $\hat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u') \geq 0$, где функция $\hat{\Phi}'_{-qg}(u_q, u_g, u')$ определяется формулой (3), а функция $\hat{\Phi}'_{+qg}(u_q, u_g, u')$ имеет вид (5).

Выводы

Используя предложенные в статье свободные от радикалов псевдонормализованные квази-phi-функции, можно описать область допустимых решений в задаче оптимальной упаковки произвольных многогранников, допускающих непрерывные вращения, с учетом максимально и минимально допустимых расстояний в виде объединения подобластей, каждая из которых описывается системой неравенств с гладкими функциями.

Следует отметить, что в случае отсутствия ограничений на максимально допустимые расстояния между невыпуклыми многогранниками область допустимых решений описывается одной системой неравенств с гладкими функциями.

Таким образом, математическая модель обозначенной выше задачи может быть представлена в виде задачи нелинейного программирования и реализована с помощью современных локальных и глобальных NLP-solvers, таких как (IPOPT, Baron, LindoGlobal, GloMIQO).

Литература: **1.** *Egeblad, J., Nielsen, B.K., Brazil, M.*: Translational packing of arbitrary polytopes. Comp. Geom. 42(4). 2009. P. 269–288. **2.** *Xiao Liu, Jia-min Liu, An-xi Cao, Zhuang-le Yao*, 2015. HAPE3D – a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering. **16(**5). P. 380–390. **3.** *Stoyan, Y., Chugay, A.*: Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. Cyber. and Syst. Anal. **48** (6). 2012. P. 837–845. **4.** *StoyanYu., Chugay A.* Construction of radical free phi-functions for spheres and non-oriented polytopes. Rep. of NAS of Ukraine. 2011. №12. P. 35-40. (In Russian). **5.** *Stoyan, Y., Pankratov, A., Romanova, T.*: Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. J. of Glob. Optim. (2015) DOI: 10.1007/s10898-015-0331-2. **6.** *Belov, Gleb*, 2002. A Modified Algorithm for Convex Decomposition of 3D Polyhedra," Technical report MATH-NM-03-2002, Institut fьr Numerische Mathematik, Technische Universitдt, Dresden, http://www.math.tu-dresden.de/~belov/cd3/cd3.ps. **7.** *Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T.* (2010) Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Comput. Geom.: Theory and Appl.43(5). P. 535–553.

Поступила в редколлегию 22.09.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шляхов В.В.

Панкратов Александр Викторович, д-р техн. наук, профессор, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, оптимизация, геометрическое проектирование. Адрес: Украина, 61118, Харьков, ул. Деревянко, д.14, кв. 26, тел. +38(067) 68 19510.

Романова Татьяна Евгеньевна, д-р техн. наук, професор, ведущий научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, геометрическое проектирование. Адрес: Украина, 61084, Харьков, ул. Новгородская, д.6а, кв. 31, тел. (057) 7013477.

Стоян Юрий Евгеньевич, аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, геометрическое проектирование, анализ данных. Адрес: Украина, 61204, Харьков, ул. Профсоюзный бульвар, д.9, кв. 53, тел. +38(063)4244246.

Alexandr V. Pankratov received Doctor of Technical Sciences degree in Mathematical Modeling and Computational Methods (2013) from Institute for Problems in Machinery of National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv). From 2013 he is a senior researcher at the Department of Mathematical Modeling and Optimal Design, Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine. His current research interests include mathematical modeling, operational research, computational geometry, optimisation, packing, cutting and covering. Address: Ukraine, 61118, Kharkiv, Derevyanko str., 14, apt. 26, tel.(067) 6819510.

Tatiana E. Romanova received Doctor of Technical Sciences degree in Mathematical Modeling and Computational Methods (2003) from Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kiev). From 2002 he is a senior researcher at the Department of Mathematical Modeling and Optimal Design, Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine. From 2005 she is a professor at the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radioelectronics. Her current research interests include mathematical modeling, operational research, computational geometry, optimisation, packing, cutting and covering. Address: Ukraine, 61145, Kharkiv, Novgorodskaya str., 6a, apt. 31, tel.(057) 7013477.

Yurij E. Stoyan received Master's degree in System Analysis (2015) from Kharkiv National University of Radioelectronics. He is an aspirant at the Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv). His current research interests include mathematical modeling, operational research, packing and cutting. Address: Ukraine, 61145, Kharkiv, str. Profsoyuznyi bulvar, 9, apt. 53, tel. +38(063)4244246.