УДК519.87

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

ВАЛИД АХМЕД МАХМУД АЛЬРЕФАИ

Рассматриваются динамические модели взаимодействия насосных агрегатов при их параллельном включении на насосных станциях. Показывается, что стабильный рост расхода и напора на выходе насосной станции при включении дополнительного агрегата может смениться квазихаотическим движением даже в линейной системе с двумя взаимодействующими агрегатами. Описываются условия различных типов перехода из одной стационарной точки в другую.

Ключевые слова: динамические модели, насосные агрегаты, устойчивый рост, хаотическое движение, конкуренция.

Key words: Dynamic models, pumps, steady growth, chaotic motion, competition.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассмотрено взаимодействие нелинейных динамических моделей одного класса технических систем, нелинейность которых является существенным свойством их динамики. Научные исследования моделирования и управления линейными динамическими системами, в основном, завершены работами Болтянского, Гамклеридзе и других последователей школы Понтрягина [1]. Однако в процессе применения даже таких линейных моделей возник ряд проблем технического и вычислительного характера, связанных с многомерностью систем и возможностью их хаотической динамики, т.е. не отличимой от стохастической. Эта проблема становится еще более актуальной при анализе взаимодействия существенно нелинейных систем Моделирование нелинейных объектов, динамика которых не может быть адекватно описана в линейном приближении, восходит к работам Вышнеградского – для механических систем, и Андронова – для систем электро- и радиотехники [2, 3]. К тому времени уже существовали развитые Пуанкаре, Понтрягиным, Петровским и Хопфом необходимые математические методы.

В настоящее время исследования существенно нелинейных взаимосвязанных систем, допускающих хаотическую динамику, ведутся в рамках синергетического подхода [1]. Проблема анализа устойчивого развития динамических систем в технике, экономике и обществе появилась сравнительно недавно в связи с общим кризисом начала нашего века. “Устойчивое развитие” взаимосвязанных динамических систем является относительно новым понятием и не предполагает удовлетворения классическим определениям устойчивости динамических систем по Ляпунову. Это связано с тем, что при моделировании динамики взаимосвязанных систем интервал моделирования конечен. При $t \to \infty$ модели выходят за рамки адекватности, как и абсолютное большинство всех нелинейных математических моделей, например, все модели процессов “с обострением”. Кроме того, в технических системах существуют жесткие ограничения на амплитуды колебания переменных состояния системы.

Также важным является исследование механизмов возникновения условий стагнации, циклической неустойчивости или хаоса в моделях и алгоритмов их численного анализа. Эта проблема возникает для широкого класса объектов различной природы. Для существенно нелинейных объектов она связана с тем, что их динамика не может быть разделена на затухающее “собственное движение” и движение под действием внешних факторов (вынуждающих сил). Поэтому классическая устойчивость здесь не является определяющим условием.

Также для любых нелинейных взаимосвязанных динамических систем характерна конкуренция либо за ресурс, либо за влияние на выходные характеристики системы. Здесь “конкуренция” является обобщением понятия обратной связи в технической системе. Конкурентные и кооперативные (или солидарные) процессы характерны для таких областей техники, как системы энергоснабжения, защиты и восстановления и технического обслуживания городского хозяйства. Они также известны в экономике, биологии, экологии, психологии, военном деле, логистике, исследовании операций и многокритериальной оптимизации. Поэтому модельное понятие “актор” может быть как “технической подсистемой” – насосным агрегатом, так и “биологическим видом”, “предприятием”, или иметь другой смысл и прикладное содержание. Во всех этих системах и их математических моделях, независимо от предметной области и физического смысла объектов, их общими свойствами являются: многосвязность, гладкость и замкнутость. Нелинейность абсолютного большинства из них определяет сложную динамику, даже для систем малой размерности [1]. Различные модели конкуренции ранее исследовались в работах Пуанкаре и Вольтерра [4]. Все они описывали сравнительно простые технические объекты и экологические системы.

Целью настоящей работы является определение условий возникновения устойчивой и квази-хаотической динамики систем с конкурентным взаимодействием. Поставлена задача именно для “мягких” моделей в целях качественного, а не количественного описания их динамики. При этом необходимо выявить точки бифуркации, оценить значения параметров, при которых осуществляется плавный переход (стабильный рост) из одной стационарной точки в другую, а также параметры хаотических режимов. Адекватность таких моделей объектам либо известна ранее, либо показана путем системного анализа общих свойств объектов [1, 3].

Объект исследования – устойчивые и хаотические процессы в динамических нелинейных конкурентных моделях взаимодействия параллельно включаемых агрегатов насосной станции.

Насосные станции рассматриваются как системы с сосредоточенными параметрами. Распределенные процессы внутри транспортной сети между такими узлами предполагаются линейными, что справедливо для сетей низкого давления или для несжимаемого носителя (вода, нефть) и ламинарного потока. Они могут быть учтены введением передаточных матриц на входах или выходах узла.

В современных публикациях [5] рассматриваются линеаризованные квазистационарные модели таких систем. Для них математической моделью являются уравнения, отражающие закон сохранения энергии, который для таких диссипативных систем верен лишь в стационарных точках и при условии усреднения по времени. Отметим, что при таком подходе поведение переходного процесса между двумя стационарными точками вообще не рассматривается. В работе предлагаются как линейные, так и нелинейные динамические модели – системы дифференциальных уравнений, описывающие весь процесс. Процессы во внутренних объемах насосов описываются уравнениями турбулентности и в данном исследовании не рассматриваются. Предлагаемая здесь феноменологическая модель может быть получена из общих уравнений в частных производных первого порядка для удельного массового расхода, давления и температуры целевого продукта [5, с. 55] путем учета только сосредоточенных параметров, поскольку характерные линейные размеры насосных агрегатов на порядки меньше характерных длин в транспортной сети.

2. Объекты и их динамические модели

Не нарушая общности, рассмотрим динамические модели взаимодействия двух (или более) насосных агрегатов при их параллельном включении в составе насосной станции (рис. 1).

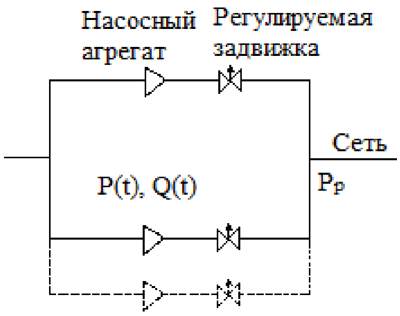

Рис. 1. Схема включения параллельно работающих насосных агрегатов

Технология и модели взаимодействия насосных агрегатов

При параллельной работе двух (i=1, 2) или нескольких насосных агрегатов каждый i-й обеспечивает на своем выходе подачу целевого продукта с давлением $P_i(t)$ и расходом $Q_i(t)$. Далее везде эти величины зависят от времени. Динамическую модель каждого i-го насосного агрегата можно представить в виде взаимосвязанной системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(P,Q), \qquad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = Q \cdot g(P,Q). \qquad (2)$$

где функции f(.) и g(.) определяются техническими характеристиками насосных агрегатов и, в свою очередь, определяют динамические свойства объекта [1, 5]. Поэтому они имеют следующие характеристики, которые далее, ввиду их общего характера, будем называть аксиомами конкурентного взаимодействия динамических систем.

Введя единые обозначения x_i вместо P_i и Q_i, систему (1), (2) со связями состояний через функции f(.) и g(.) в правой части представим в стандартном виде:

A1. $\frac{dx_i}{dt} = x_i \cdot f_i(X), \quad x_i >> 0, \quad i=1,...,n,$

$X = (x_i)^T, \quad F(X) = (f_i(X))^T;$

A2. $\frac{df_j}{dx_i} > 0$ для кооперации, и

$\frac{df_j}{dx_i} < 0$ для конкуренции, $\forall j \neq i$.

A3. Если $X^{(i)}$ – вектор системных переменных X без x_i, то $f_i(X^{(i)}=0)=const>0$.

A4. $f_i(X^{(i)})$ – линейная функция по всем своим переменным.

Отметим, что анализ конкуренции между двумя акторами, проводившийся изначально в работах Гаузе, Лотки и Вольтерра [4], начинался с рассмотрения двумерной динамической модели, тогда как объект из двух насосных агрегатов (см. рис.1) описывается системой из четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dt} &= P_1(a_1 + b_1Q_1 + c_1P_2 + d_1Q_2),\\
\frac{dQ_1}{dt} &= Q_1(a_2P_1 + b_2 + c_2P_2 + d_2Q_2),\\
\frac{dP_2}{dt} &= P_2(a_3P_1 + b_3Q_1 + c_3 + d_3Q_2),\\
\frac{dQ_2}{dt} &= Q_2(a_4P_1 + b_4Q_1 + c_4P_2 + d_4).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Из физических свойств взаимодействия двух насосных агрегатов следует, что возрастание давления на выходе второго насосного агрегата противодействует работе первого, что приводит к уменьшению скорости изменения давления и уменьшению расхода на его выходе. Для адекватного описания такого взаимодействия – «конкуренции» насосных агрегатов необходимо выполнение $a_i>0$, $c_i<0$, согласно аксиоме A2. Поскольку при увеличении расхода через насосный агрегат давление на его выходе падает, то коэффициенты $b_{1,2}$ в уравнениях первого насоса и $d_{3,4}$ для второго – отрицательны.

Согласно технологии, процесс включения насосной станции происходит в три этапа:

1) при закрытых задвижках всех насосных агрегатов (см. рис.1) включается первый агрегат. При расходе, равном нулю, давление на выходе этого агрегата возрастает до максимальной величины P_0. С этого момента начинается открытие задвижки первого агрегата, что приводит к возрастанию расхода до величины Q_p^1 и снижению давления до величины P_p^1, где P_p^1 и Q_p^1 – рабочая точка насосного агрегата и сети. Это – первая стационарная точка;

2) если давление в рабочей точке не достаточно, аналогично включаются остальные агрегаты;

3) по достижении требуемого давления на выходе насосной станции получаем вторую (последнюю) стационарную точку с параметрами P_p^2 и Q_p^2.

Таким образом, процессы включения агрегатов описываются двумя различными моделями. Первая, при Q=0, модель одного насосного агрегата представляет собой известное логистическое уравнение:

$$dP/dt = k \cdot P \cdot (1-P),$$

при начальных условиях $P(0) \approx 0$, параметре роста $k>0$ и условиях нормировки $P(t)<P_p<1$. Это – частный случай уравнения (1) при $f(P,Q)= k(1-P)$ и отсутствии уравнения (2).

Эта модель хорошо исследована [1-4]. Логистическое уравнение разрешимо аналитически.

Предположение $P_p>1$ выводило бы модель за рамки адекватности, однако некоторые авторы [6] считают, что она годится для описания режима “помпажа” в насосе.

Модель насосного агрегата на втором этапе. После открытия задвижки на выходе включенного насосного агрегата его модель будет описываться полной системой уравнений (1), (2). Итоговая модель включения всех агрегатов насосной станции описывается взаимосвязанной системой нелинейных уравнений (3). Её модификация пригодна также для описания систем с защитой и техническим обслуживанием[1]. Такими же моделями описываются и процессы взаимодействия в системах ЖКХ [7], состоящих из владельцев жилищного фонда и монопольной обслуживающей компании. В данной работе основное внимание уделено изучению локальной и глобальной асимптотической устойчивости позитивных ограниченных решений и бифуркаций положений равновесия. Динамика модели определяется численно и, где возможно, аналитически – для оценки точности численного метода.

Для разработки эффективных методов анализа системы, не нарушая общности, проведем линеаризацию модели (3) в окрестности двух её стационарных рабочих точек путем разложения ее правой части в ряд Тейлора до первого члена. Первая из них, согласно этапу 2, даёт начальные условия для системы (3). Из физики процесса следует ее неустойчивость, что подтверждается результатами моделирования (рис.2).

После линеаризации введем обозначения: вектор $\mathbf{X} = (P_i, Q_i)$ – состояния системы, $\mathbf{A}$ – $(2n \cdot 2n)$, матрица первых частных производных в стационарах, $\mathbf{F}$ – 2n вектор констант.

После переобозначений система приобретает вид $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}+\mathbf{F}$. Для линейной 2n-мерной системы задача анализа устойчивости сводится к проверке знака показателя Ляпунова $\mathrm{Re}(\lambda)$, где $\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$, в стационарной точке $\mathbf{X}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$. В ситуации общего положения матрица $\mathbf{A}$ не вырождена. Структура матрицы отражает взаимовлияние r_{ij} через давление i-го и j-го насосных агрегатов в модели на рис.1:

$$A=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 0 \\ m_1 \\ 0 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Анализ такой модели в окрестности стационаров позволяет выяснить:

– параметры связей для исследования устойчивой и неустойчивой динамики;

– параметры точки бифуркации, при которых отношение частот колебаний ω_1 / ω_2 – иррационально, что приводит к появлению аттрактора типа тора.

Начало координат на рисунках, следуя традиции, перенесено в соответствующую стационарную точку, где проведена линеаризация.

3. Результаты расчетов и их анализ

Целью расчетов является анализ динамики в окрестности начального и конечного стационаров в целях выявления характера переходного процесса между ними.

3.1. Модель насосной станции – система из 4-х уравнений модели (см. рис.1) на втором этапе процесса подключения – первая стационарная точка.

Вектор собственных значений λ матрицы уравнения (3):

$$(-0.039,\ 0.3+0.436i,\ 0.3-0.436i,\ -0.012).$$

Координаты нетривиальной стационарной точки в фазовом пространстве $X^*= (10.23,\ 2.28,\ 0.14,\ 0.74)$.

На рис.2 изображена двумерная проекция на $P_{1,2}$ фазового пространства $P_1\ P_2\ Q_1\ Q_2$ в окрестности стационара:

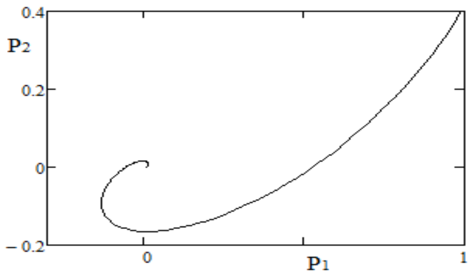

Рис. 2. Динамика давлений в окрестности первого стационара

Проверка на тип собственных значений и рисунок проекции показали наличие неустойчивого узло-фокуса. Налицо устойчивое возрастание параметров давления P_i вдали от стационара на конечном отрезке времени. Графики, полученные численным и численно-аналитическим методами, неотличимы.

3.2. Модель насосной станции на третьем этапе процесса подключения – в окрестности последней стационарной точки. Начальные условия везде $(P_1, Q_1, P_2, Q_2)_0=(1, 0, 1, 0)$, поскольку вначале задвижки закрыты.

Для исследуемых типов насосных агрегатов параметры матрицы A после нормализации имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0.01 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0.5 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.65 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа подтверждают устойчивость процесса:

(-0.45+i0.44, -0.45-i0.44, -0.05-i0.47, -0.05-i0.47),

однако переходный процесс, как видно из графиков проекций фазовых траекторий (рис.3 и 4), колебательный, т.е. при данных параметрах устойчивый рост расхода и давления не наблюдается.

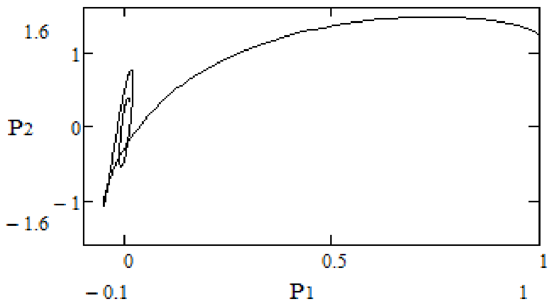

Рис. 3. Динамика давлений в окрестности устойчивого стационара

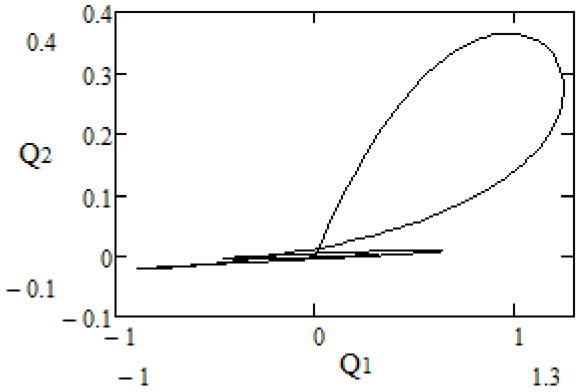

Рис. 4. Динамика расхода в окрестности устойчивого стационара

3.3. Малая вариация параметров может перевести систему в окрестность нерезонансного тора, что легко видеть из мнимых частей собственных чисел (-0.05-i0.55, -0.05+i0.55, -0.026-i0.57, -0.026+i0.57) слабо проварьированной матрицы параметров A:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -1 & 0.01 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0.13 & 0 & 0.5 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0.65 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Кавзи-хаотическая динамика системы видна на рис. 5 и 6 проекций фазового пространства.

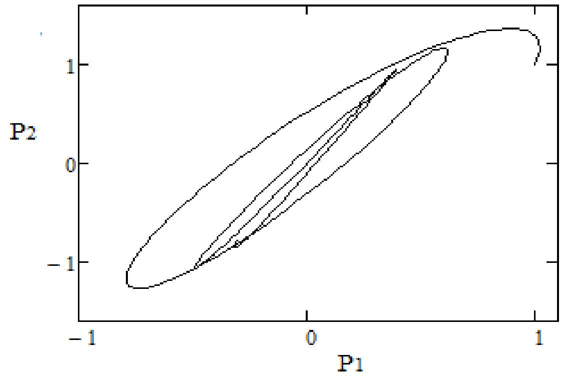

Рис. 5. Динамика давлений после слабого изменения параметров

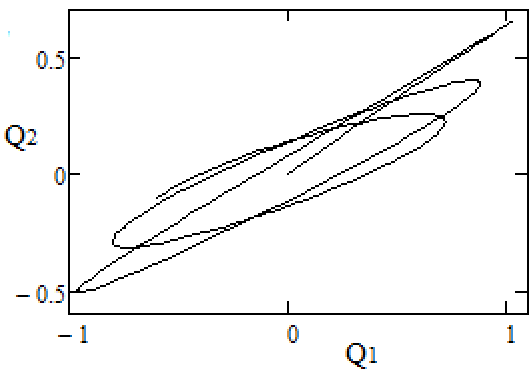

Рис. 6. Динамика расхода после слабого изменения параметров

Выводы

Впервые предложены феноменологические модели динамики взаимодействия системы параллельно включаемых агрегатов насосных станций, отличающиеся от известных учетом их нелинейных связей, что позволяет адекватно описать их взаимодействие при переходе между двумя стационарными состояниями. Анализ переходных процессов, возникающих в динамической модели системы включения двух и более насосных агрегатов, показывает, что переходные процессы при некоторых значениях параметров могут устанавливаться медленно, демонстрируя квази-хаотическую динамику, что может привести к авариям системы. Посредством предложенного подхода “конкуренции” агрегатов получены **практически важные результаты** о возможности и условиях возникновения нежелательных квази-хаотических переходных режимов. Отмечено, что эти модели **в перспективе** описывают также широкий класс конкурентных процессов, в частности, взаимоотношений между субъектами деятельности в ЖКХ, которые могут представлять объект дальнейших исследований.

Литература: 1. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику / Г. Г. Малинецкий. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 256 с. **2.** *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин/ М.: Наука, 1981. 352 с. **3.** *Анищенко В.С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Часть 1. Физико-математические основы описания и исследования динамической стохастичности / В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. 125 с. **4.** *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с. **5.** *Трубопроводные* системы энергетики. Управление развитием и функционированием / Под ред А.Д. Тевяшева. Новосибирск: Наука, 2004/ 461 с. **6.** *Шерстюк А.М.* Насосы, вентиляторы и компрессоры / А.М. Шерстюк. М.: Высшая школа, 1972. 344с. **7.** *Егорова Н. Е., Митрофанова И. Н., Шеин А. М.* Имитационная модель предприятия ЖКХ как инструмент анализа тарифно-ценового механизма //Аудит и финансовый анализ. 2007. №6. С. 37-42.

Поступила в редколлегию 09.09.2015

Валид Ахмед Махмуд Альрефаи, аспирант кафедры Прикладной математики ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина,14, Email: wamralal@yahoo.com

Waleed Ahmed Mahmoud Alrefai, graduate student of the Department of Applied Mathematics, Kharkov National University of Radio Electronics Lenin AVE., 14, Kharkov, Ukraine, Email: wamralal@yahoo.com