



ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ПАРАМЕТРАМИ

ЛУХАНІН В.С.

Розглядаються питання існування, єдиності та побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку однієї лінійної еліптичної крайової задачі з двома параметрами. Описуються умови, яким мають задовольняти параметри, щоб двосторонні наближення можна було побудувати.

Ключові слова: функція Гріна, двосторонні наближення, інваріантний конусний відрізок, додатний розв'язок, угнутість, монотонність.

Key words: Green's function, two-sided approximations, invariant cone segment, positive solution, concavity, monotonicity.

Вступ

Багато фізичних процесів зводиться до задачі

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \\ u &> 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

де $f(x, u)$ є лінійною відносно u функцією.

Актуальність дослідження: до такої крайової задачі зводиться достатньо велика кількість фізичних процесів. Отримати точний розв'язок цієї задачі вдається дуже рідко. Застосування багатьох наближених методів, зокрема варіаційних або сіткових, пов'язано з дослідженням точності отриманого розв'язку, що в загальному випадку виявляється досить складною задачею. Вважаємо, що побудова двосторонніх наближень позбавляє дослідника цих труднощів.

Метою роботи є дослідити можливість побудови двосторонніх наближень для розв'язання даної задачі.

Метод двосторонніх наближень належить до ітераційних методів. Вони є універсальним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому двосторонні наближення дозволяють отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації.

1. Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу для лінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u = au(x) + b \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad b \geq 0, \quad a = \text{const}. \quad (2)$$

Якщо рівняння (1) набуває вигляду

$$-\Delta u = \kappa^2 u(x),$$

маємо задачу про розповсюдження, випромінювання та розсіювання звуку на твердих тілах [1].

Якщо вивчається процес дифузії за наявності "ланцюгових" реакцій (частинки дифундуючої рідини або газу вступають у реакцію з навколишнім середовищем і розмножуються), також маємо рівняння (1), в якому стала a є коефіцієнтом пропорційності швидкості реакції розпаду до концентрації газу.

2. Побудова послідовних наближень

Відомо [2], що задача (1), (2) у класі неперервних функцій еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, s) [au(s) + b] ds,$$

де $G(x, s)$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω , $x = (x_1, \dots, x_m)$, $s = (s_1, \dots, s_m)$.

На конусі K невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій введемо в розгляд лінійне операторне рівняння $u = Tu$, де

$$Tu = \int_{\Omega} G(x, s) [au(s) + b] ds. \quad (3)$$

Відомо, що конус невід'ємних в $C(\Omega)$ функцій є нормальним, крім того, оскільки функція

$$f(x, u) = au(x) + b$$

неперервна за u , оператор T , відображаючи простір $C(\Omega)$ в себе, цілком неперервний [2, 3].

Розглянемо деякі властивості оператора T вигляду (3).

1) Оператор T монотонний, тобто з $u_1 \leq u_2$ повинно впливати $Tu_1 \leq Tu_2$. Складаємо різницю

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \int_{\Omega} G(x, s) [au_1(s) + b] ds - \\ &- \int_{\Omega} G(x, s) [au_2(s) + b] ds = \int_{\Omega} G(x, s) a(u_1(s) - u_2(s)) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Останнє виконується, якщо

$$a > 0. \quad (4)$$

2) Для побудови конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 \leq u \leq w_0$, інваріантного для оператора T , в (3) покладемо $u = v_0 = 0$ та складемо елемент

$$v_1 = Tv_0 = \int_{\Omega} G(x, s)[av_0(s) + b]ds = \\ = \int_{\Omega} G(x, s)bds \geq v_0 = 0.$$

Потім побудуємо елемент

$$v_2 = \int_{\Omega} G(x, s)[av_1(s) + b]ds \geq v_1$$

і так далі.

Тепер в (3) покладемо $u = w_0 = \beta$, $\beta = \text{const} \geq 0$ – визначиться в майбутньому, маємо

$$w_1 = \int_{\Omega} G(x, s)[aw_0(s) + b]ds = \int_{\Omega} G(x, s)[a\beta + b]ds.$$

Підбираємо параметри a та β так, щоб $w_1 \leq w_0$. Ця вимога приводить нас до умови

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, s)ds \leq \frac{\beta}{a\beta + b}. \quad (5)$$

При цьому

$$w_2 = \int_{\Omega} G(x, s)[aw_1(s) + b]ds \leq \int_{\Omega} G(x, s)[a\beta + b]ds = w_1.$$

Таким чином, маємо $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$, є інваріантним для оператора T вигляду (3).

3) Дослідимо оператор T на угнутість на $\langle v_0, w_0 \rangle$. Для цього має виконуватися умова $T(tu) \geq tTu \quad \forall t \in [0, 1]$, $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$. Складемо

$$T(tu) - tTu = \\ = \int_{\Omega} G(x, s)b(1-t)ds, \quad t \in [0, 1]. \quad (6)$$

Щоб (6) була невід'ємною, треба вимагати виконання умови

$$b(1-t) \geq 0.$$

Для $t \in [0, 1]$ та $\forall x \in \Omega$ ця умова виконується завжди.

4) Дослідимо оператор T вигляду (3) на u_0 -угнутість, де

$$u_0 = \int_{\Omega} G(x, s)ds.$$

Угнутий оператор T називається u_0 -угнутим на $\langle v_0, w_0 \rangle$, якщо для кожного $t_0 \in (0, 1)$ можна вказати таке $\eta = \eta(u, t_0) > 0$, що $T(t_0 u) \geq (1 + \eta)t_0 Tu$ на відрізку,

сумірному з u_0 [2] (будь-який елемент вигляду $\text{const} \cdot u_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ сумірний з u_0 за визначенням).

Складаємо

$$T(t_0 u) - (1 + \eta)t_0 Tu = \\ = \int_{\Omega} G(x, s)(b - t_0 b - \eta t_0 [au(s) + b])ds. \quad (7)$$

Щоб (7) була невід'ємною, вимагаємо виконання нерівності

$$b - t_0 b - \eta t_0 [au(x) + b] \geq 0,$$

$\forall t_0 \in (0, 1)$, $\eta > 0$, звідки маємо умову

$$\eta \leq \frac{b(1-t_0)}{t_0(au(x) + b(x))},$$

яка виконується, якщо чисельник $b(1-t_0) \geq 0$, що, очевидно, має місце.

Із виконання властивостей 1)–4) випливає існування та єдиність додатного розв'язку у задачі (1), (2) [2, с. 283].

Ітераційний процес для задачі (1), (2) будемо за схемою

$$v_n(x) = \int_{\Omega} G(x, s)[av_{n-1}(s) + b]ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$w_n(x) = \int_{\Omega} G(x, s)[aw_{n-1}(s) + b]ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $v_0 = 0$, $w_0 = \beta$. За умови виконання вимог (4), (5) маємо рівномірну збіжність до єдиного додатного розв'язку $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$. При цьому

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots$$

$$\dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Якщо в задачі (1), (2)

$$b = b(x), \quad b(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

то умова (5) приймає вигляд

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, s)ds \leq \frac{\beta}{a\beta + b}, \quad \tilde{b} = \max_{x \in \Omega} b(x). \quad (8)$$

3. Результати обчислювального експерименту

Обчислювальні експерименти проведено у випадку $b = \text{const}$ та $b = b(x)$ у крузі та півкрузі відповідно.

1) Розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

при значеннях $a = 0,1$, $b = 5$, $\beta = 1,9$. Такі значення задовольняють умовам (4), (5).

В табл. 1 наведено значення для наближень $w_3(\mathbf{x})$ та $v_3(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

Таблиця 1

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_3	1,219830	1,070450	0,814061	0,453726
	v_3	1,219820	1,070430	0,814052	0,453722
$\frac{\pi}{5}$	w_3	1,219830	1,069770	0,812363	0,451975
	v_3	1,219820	1,069760	0,812354	0,451970
$\frac{3\pi}{10}$	w_3	1,219830	1,069020	0,810916	0,450081
	v_3	1,219810	1,069010	0,810908	0,450077
$\frac{2\pi}{5}$	w_3	1,219830	1,069280	0,811528	0,450668
	v_3	1,219810	1,069270	0,811519	0,450664
$\frac{\pi}{2}$	w_3	1,219860	1,073530	0,820921	0,461770
	v_3	1,219850	1,073520	0,820912	0,461766

На рис. 1 та 2 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_3(\mathbf{x})$ відповідно.

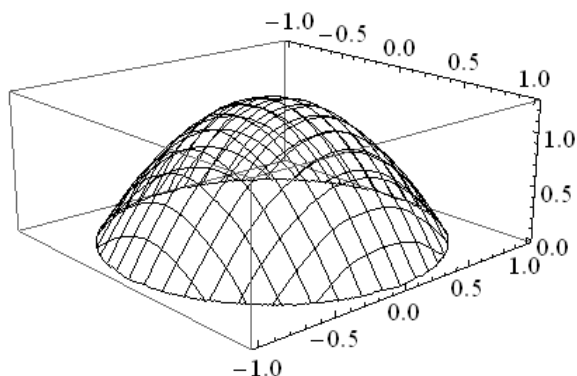


Рис. 1. Поверхня для наближення $w_3(\mathbf{x})$

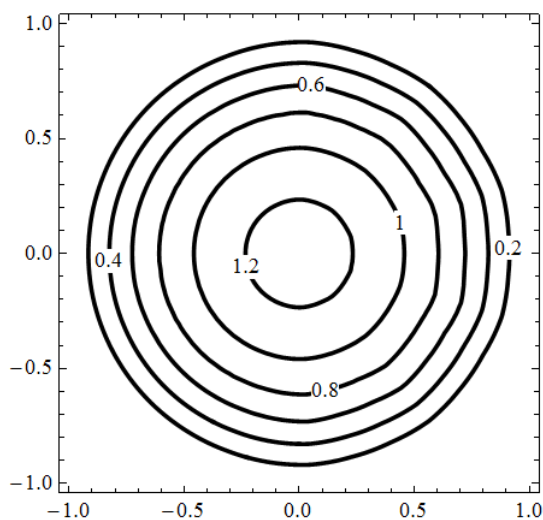


Рис. 2. Лінії рівня для наближення $w_3(\mathbf{x})$

2) Тепер розглянемо область

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

при значеннях $a = 0,5$, $\beta = 1,9$,

$$b = b(\mathbf{x}) = 10 \sin(0,1)(-\Delta \omega(\mathbf{x}) + 10 \omega(\mathbf{x})),$$

де $\omega(\mathbf{x}) = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$ є рівнянням межі $\partial\Omega$ [4]. Такі значення задовольняють умовам (4), (8).

В табл. 2 наведено значення для наближень $v_3(\mathbf{x})$ та $w_3(\mathbf{x})$ у точках області Ω з полярними координатами (ρ_i, φ_j) , де $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$.

На рис. 3 та 4 представлені поверхні та лінії рівня для наближення $w_3(\mathbf{x})$ відповідно.

Таблиця 2

φ		ρ			
		0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\pi}{10}$	w_3	0,111160	0,190904	0,206723	0,141847
	v_3	0,111160	0,190902	0,206722	0,141846
$\frac{\pi}{5}$	w_3	0,211367	0,362888	0,392750	0,269359
	v_3	0,211366	0,362886	0,392748	0,269357
$\frac{3\pi}{10}$	w_3	0,290852	0,499246	0,540053	0,370257
	v_3	0,290850	0,499243	0,54005	0,370255
$\frac{2\pi}{5}$	w_3	0,341867	0,586820	0,634845	0,435241
	v_3	0,341865	0,586816	0,634842	0,435239
$\frac{\pi}{2}$	w_3	0,359443	0,616922	0,66727	0,457381
	v_3	0,359440	0,616918	0,667266	0,457379

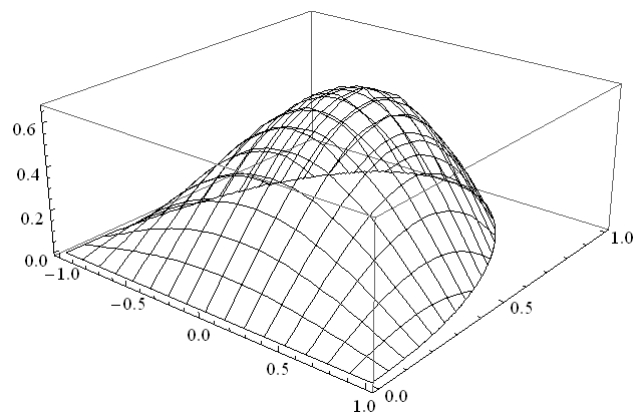


Рис. 3. Поверхня для наближення $w_3(\mathbf{x})$

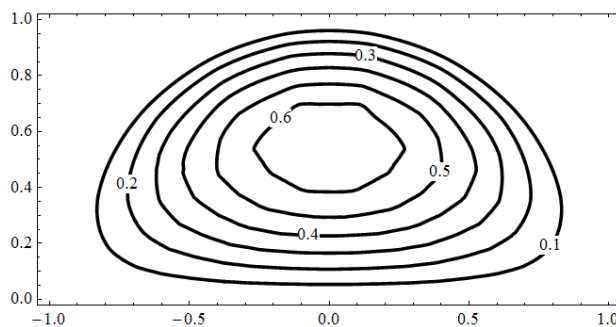


Рис. 4. Лінії рівня для наближення $w_3(\mathbf{x})$

4. Висновки

Вперше до розв'язання задачі (1), (2) з лінійною функцією було запропоновано застосувати методи теорії операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах.

Досліджено можливість побудови двосторонніх наближень до додатного розв'язку задачі (1), (2) та отримано умову (5), яка гарантує збіжність ітераційного процесу.

Зазначимо, що побудова конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ по суті є апіорною оцінкою шуканого розв'язку, оскільки маємо $v_0 \leq u^* \leq w_0$. Отримані двосторонні наближення до розв'язку задачі дають можливість робити апостеріорні висновки.

Хочемо ще зазначити, що при застосуванні запропонованого методу немає необхідності робити порівняння отриманого розв'язку з розв'язками, отриманими іншими методами.

Ще однією з переваг цього методу у порівнянні з іншими є відносна простота реалізації алгоритму, що в свою чергу вимагає менше обчислювальних ресурсів.

Крім вказаного вище, нам вдалося накласти певні умови на два параметри, які входять у постановку задачі, що дозволяє довести існування єдиного додатного розв'язку та побудувати двосторонні наближення.

Література: 1. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 688 с. 2. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с. 3. Опојцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. 4. Калиниченко В. И., Коций А. Ф., Ропавка А. И. Численные решения задач теплопроводности. Харьков: Вища школа, 1987. 108 с.

Транслитерований список літератури: 1. Budak B. M., Samarskij A. A., Tihonov A. N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 1980. 688 p. 2. Krasnosel'skij M. A. Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenij. M.: Fizmatgiz, 1962. 394 p. 3. Opojcev V. I., Hurudze T. A. Nelinejnye operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 p. 4. Kalinichenko V. I., Koshhij A. F., Ropavka A. I. Chislennye reshenija zadach teploprovodnosti. Har'kov: Vishha shkola, 1987. 108 p.

Надійшла до редколегії 28.08.2015

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук Колосов А. І.

Луханін Володимир Сергійович, магістр, аспірант кафедри ПМ ХНУРЕ, інженер-програміст в EPAM Systems. Наукові інтереси: розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Хоббі: читання, спорт. Адреса: Україна, 61103, Харків, вул. Космонавтів, 5А, кв. 2, тел. +38(050) 617-41-94.

Volodymyr Lukhanin, master, postgraduate student at the Department of Applied Mathematics of Kharkiv National University of Radio and Electronics, software engineer at EPAM Systems. Scientific interests: solving boundary value problems for partial differential equations. Hobby: reading, sports. Address: Ukraine, 61103, Kharkiv, Kosmonavtiv str. 5A, apt. 2, phone +38(050) 617-41-94.