

## ОБОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ВЛАСЕНКО Л.А., РУТКАС А.Г.

Изучается задача оптимального управления переходными процессами в электрических цепях с сосредоточенными линейными элементами. Качество управления характеризуется квадратичный функционал энергии, зависящий от параметров цепи. Переходные процессы моделируются линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, для которых получены условия существования и единственности оптимального управления. Результаты применяются для расчета оптимального управляющего напряжения в цепи.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, переходной процесс, электрическая цепь, дифференциально-алгебраическое уравнение.

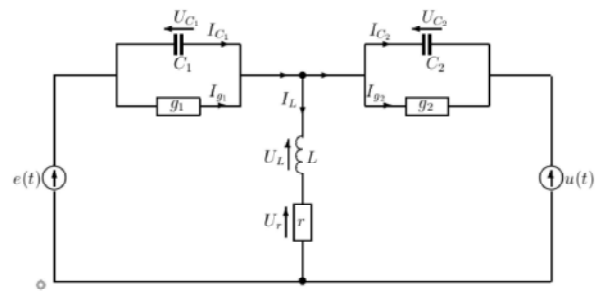
**Key words:** optimal control, transient process, electrical circuit, differential-algebraic equation.

### 1. Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления в электрических цепях, математические модели которых описываются с помощью дифференциально-алгебраических уравнений. Для этого изучим линейно-квадратичную задачу оптимального управления в системе, динамика которой описывается дифференциально-алгебраическим уравнением. Такие системы управления также называют дескрипторными. Существует обширная литература по задаче оптимального управления для дескрипторных систем (см., например, [1-4]). Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4]. В отличие от работы [4] здесь не налагаются никакие ограничения на резольвенту характеристического пучка матриц, отвечающего уравнению. Ограничения также сняты в задаче импульсного управления в [5].

### 2. Постановка задачи для электрической цепи

Для демонстрации предлагаемого метода оптимального управления рассмотрим электрический четырехполюсник, изображенный на рисунке. Четырехполюсник имеет два источника напряжения  $e(t)$  и  $u(t)$ ;  $e(t)$  – заданная функция от времени,  $u(t)$  – управляемый источник напряжения. Параллельно с емкостями  $C_1, C_2$  включены проводимости  $g_1, g_2$ . На внутренней ветви расположены индуктивность  $L$  и сопротивление  $r$ .



Электрический четырехполюсник

Токи  $I_{C_1}, I_{C_2}, I_{g_1}, I_{g_2}, I_L$  и напряжения  $U_{C_1}, U_{C_2}, U_r, U_L$  удовлетворяют законам Кирхгофа

$$\begin{aligned} I_{C_1} + I_{g_1} &= I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \\ U_{C_1} + U_L + U_r &= E, \quad U_{C_1} + U_{C_2} + u = E, \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнениям

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{d}{dt} I_L, \quad U_r = r I_L, \\ I_{C_j} &= C_j \frac{d}{dt} U_{C_j}, \quad I_{g_j} = g_j U_{C_j}, \quad j=1,2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L, r, C_j, g_j$  – положительные постоянные. Состояние электрической цепи характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T = (I_L(t), U_{C_1}(t), U_{C_2}(t))^T,$$

состоящим из «энергетических» компонент, которые отвечают инерционным элементам. С помощью (1),(2) получаем систему трех дифференциально-алгебраических уравнений относительно «энергетических» компонент:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} I_L + U_{C_1} + r I_L &= e(t), \\ C_1 \frac{d}{dt} U_{C_1} - C_2 \frac{d}{dt} U_{C_2} - I_L + g_1 U_{C_1} - g_2 U_{C_2} &= 0, \\ U_{C_1} + U_{C_2} &= e(t) - u(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Перепишем систему уравнений (3) в векторной форме относительно вектора состояний  $x(t)$ :

$$\frac{d}{dt} [Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + Ku(t), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ f(t) &= \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \\ e(t) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача оптимального управления в системе (3) состоит в выборе входного (управляющего) напряжения  $u(t)$ , реализующего минимум «энергетического» квадратичного функционала качества этой системы. Вид функционала уточним в разделе 4 данной статьи.

### 3. Постановка и решение задачи оптимального управления для дифференциально-алгебраического уравнения

В данном разделе относительно уравнения (4) будем предполагать:  $A, B$  – вещественные матрицы размеров  $n \times n$ ,  $K$  – вещественная матрица размера  $n \times m$ ,  $f(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция со значениями в  $\mathbf{R}^n$ . Управление системой (4) осуществляется с помощью  $m$ -мерного вектора управления  $u(t)$ , которому отвечает  $n$ -мерный вектор состояния системы  $x(t) = x(t; u)$ . Уравнение (4) будем рассматривать на отрезке времени  $[0, T]$ . Начальное условие зададим в виде

$$Ax(0) = q. \quad (6)$$

Чтобы исследовать задачу оптимального управления в системе (4),(6), опишем решения  $x(t) = x(t; u)$  этой системы при различных допустимых управлениях.

Введем обозначения:  $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$  – пространство вектор-функций со значениями в  $\mathbf{R}^n$ , суммируемых с квадратом нормы на  $[0, T]$ ;  $W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$  – пространство Соболева порядка  $k$  вектор-функций из  $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ , у которых обобщенные производные до порядка  $k$  включительно принадлежат  $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ . Функции из  $W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$  будем считать непрерывными на  $[0, T]$ , изменив их, если необходимо, на множестве нулевой меры. Символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение в пространстве  $\mathbf{R}^n$  или  $\mathbf{R}^m$ , символ  $E$  обозначает единичную матрицу соответствующей размерности, а транспонированную матрицу к матрице  $K$  обозначаем через  $K'$ .

Пусть  $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ ,  $u(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$ . Функцию  $x(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$  назовем решением задачи (4),(6) на отрезке  $[0, T]$ , если  $Ax(t) \in W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ , функция  $x(t)$  почти всюду удовлетворяет уравнению (4) и выполнено начальное условие (6). Управлению  $u(t)$  отвечает решение  $x(t) = x(t; u)$  системы (4),(6).

На динамику системы существенно влияет пучок матриц  $\lambda A + B$ . Будем предполагать, что этот пучок матриц является регулярным, т.е. его определитель  $\det(\lambda A + B)$  отличен от тождественного нуля. Тогда в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки  $|\lambda| \geq \vartheta$  нет собственных чисел пучка  $\lambda A + B$  (или нулей многочлена  $\det(\lambda A + B)$  в комплексной плоскости). Определим матрицы:

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\vartheta} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1,$$

$$G = Q_1 A + Q_2 B, \quad W = -B G^{-1} Q_1, \quad F = Q_2 A G^{-1},$$

где матрица  $F$  является нильпотентной с индексом нильпотентности  $\nu$  ( $F^\nu = 0, F^{\nu-1} \neq 0$ ). Заметим, что матрицы  $Q_1, Q_2$  являются вещественными, хотя контурное интегрирование осуществляется по комплексной переменной. Будем предполагать, что  $FK = 0$ , и если  $\nu > 1$ , то  $F^k f(t) \in W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$  для  $k = 1, \dots, \nu - 1$ . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1 из [6], получаем, что для любого вектора  $q$  из начального условия (6) такого, что

$$Q_2 q = \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^{k+1} f(t)]_{t=0}, \quad (7)$$

существует единственное решение  $x(t)$  начальной задачи (4),(6) на отрезке  $[0, T]$  и это решение допускает представление

$$x(t) = G^{-1} \left\{ e^{Wt} Q_1 q + \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 [f(\tau) + Ku(\tau)] d\tau \right\} + G^{-1} Q_2 \left\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^k f(t)] + Ku(t) \right\}.$$

Подобный результат для более общего дифференциально-операторного уравнения можно найти в [7].

Задача оптимального управления заключается в оптимизации управления  $u(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$ , реализующего минимум функционала качества

$$\min_{u \in L_2} J(u),$$

$$J(u) = \int_0^T \left[ \langle N_1 x(t), x(t) \rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle N_2 u(t), u(t) \rangle_{\mathbf{R}^m} \right] dt \quad (8)$$

на решениях  $x(t) = x(t; u)$  задачи (4),(6), где  $N_1, N_2$  – квадратные неотрицательно определенные матрицы соответственно размеров  $n, m$ , причем  $N_2 \geq \delta I$ ,  $\delta > 0$ .

Управление  $u_*(t)$ , на котором достигается минимум функционала (8), будем называть оптимальным управлением, а соответствующее решение  $x_*(t) = x(t; u_*)$  – оптимальным решением. Будем придерживаться схемы метода, предложенной в [4]. Существование и единственность оптимального управления устанавливает

**Теорема 1.** Пусть пучок матриц  $\lambda A + B$  является регулярным;  $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ ; если индекс нильпотентности  $\nu$  матрицы  $F$  больше 1, то  $F^k f(t) \in W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$  для  $k = 1, \dots, \nu - 1$ ; матрица  $K$

при управлении в уравнении (4) такая, что  $FK = 0$ . Тогда для любого начального вектора  $q$  в условиях (6), удовлетворяющем соотношению (7), существует единственное оптимальное управление  $u_*(t)$ , минимизирующее функционал качества (8).

Доказательство. Доказательство теоремы 1 осуществляется по схеме доказательства теоремы 2 из [4]. Единственное решение  $x(t; u)$ , задачи (4),(6) и функционал  $J(u)$  (8) представимы в виде

$$x(t; u) = L(u)(t) + w(t),$$

$$J(u) = \langle N_1(Lu + w), Lu + w \rangle + \langle N_2u, u \rangle,$$

где  $L$  – ограниченный линейный оператор из  $L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$  в  $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$  вида

$$(Lu)(t) = G^{-1} \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 Ku(\tau) d\tau + G^{-1} Q_2 Ku(t),$$

$$w(t) = G^{-1} \left\{ e^{Wt} Q_1 q + \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 f(\tau) d\tau \right\} + G^{-1} Q_2 \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^k f(t)].$$

К оператору  $L$  определим сопряженный оператор  $L^*$  из  $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$  в  $L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$ :

$$(L^*v)(t) = K'Q_1' \int_t^T e^{W(\tau-t)} (G')^{-1} v(\tau) d\tau + K'Q_2' (G')^{-1} v(t). \quad (9)$$

Оператор  $M = N_2 + L^*N_1L$  является ограниченным линейным оператором в  $L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$ , который самосопряжен и имеет ограниченный обратный, норма которого оценивается как  $\|M^{-1}\| \leq 1/\delta$ . Функция

$$u_*(t) = -(M^{-1}L^*N_1w)(t) \quad (10)$$

является единственным оптимальным управлением задачи (4),(6),(8), так как непосредственные вычисления показывают, что  $J(u) - J(u_*) \geq \delta \|u - u_*\|^2$  для всех  $u \in L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$ . На этом доказательство теоремы завершается.

Согласно подходу, принятому в [8], введем в рассмотрение сопряженное состояние  $p(t)$  и сопряженную систему, решением которой является сопряженное состояние. Для этого заметим, что соотношение

$$N_2u + L^*N_1x(u) = 0 \quad (11)$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $u = u_*$  является оптимальным управлением и  $x(u_*) = x_*$  является оптимальным решением (ср. с утверждением 1 [4]).

Используя вид сопряженного оператора  $L^*$  (9), равенство (11) переписываем в форме

$$N_2u + K'Q_1' \int_t^T e^{W(\tau-t)} (G')^{-1} N_1x(\tau) d\tau + K'Q_2' (G')^{-1} N_1x(t) = 0.$$

Теперь можно ввести сопряженное состояние

$$p(t) = Q_1' \int_t^T e^{W(\tau-t)} (G')^{-1} N_1x(\tau) d\tau + Q_2' (G')^{-1} N_1x(t). \quad (12)$$

Тогда оптимальное управление (10) вычисляется через сопряженное состояние (12) по формуле:

$$u_*(t) = -N_2^{-1}K'p(t). \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$Q_1' p(t) = \int_t^T e^{W(\tau-t)} Q_1' (G')^{-1} N_1x(\tau) d\tau$$

является единственным решением задачи

$$\frac{d}{dt}[Q_1' p(t)] + W'[Q_1' p(t)] + Q_1' (G')^{-1} N_1x(t) = 0, \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad Q_1' p(T) = 0,$$

таким, что  $Q_1' p(t) \in W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ . Отсюда следует, что функция  $p(t)$  (12) является единственным решением задачи

$$\frac{d}{dt}[A'Q_1' p(t)] = B'p(t) - N_1x(t), \quad (14)$$

п.в.  $t \in [0, T]$ ,  $Q_1' p(T) = 0$ ,

таким, что  $A'Q_1' p(t) \in W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ . Согласно соотношению (13) оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) + KN_2^{-1}K'p(t) = f(t), \quad (15)$$

п.в.  $t \in [0, T]$ ,  $Ax(0) = q$ .

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть пучок матриц  $\lambda A + B$  является регулярным;  $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ ; если индекс нильпотентности  $\nu$  матрицы  $F$  больше 1, то  $F^k f(t) \in W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$  для  $k = 1, \dots, \nu - 1$ ; матрица  $K$  при управлении в уравнении (4) такая, что  $FK = 0$ ;

начальный вектор  $q$  в условии (6) удовлетворяет соотношению (7). Тогда задача (14),(15) имеет единственное решение  $p(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ ,  $x(t) = x_*(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ . Оптимальное управление  $u_*(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^m)$  строится по формуле (13).

Заметим также, что подход, в котором анализируются задачи оптимального управления с точки зрения функционального анализа, изложен в [9].

#### 4. Приложение результатов раздела 3 к исследованию задачи оптимального управления входным напряжением в электрических цепях

Вернемся к системе (3), описанной в разделе 2. Начальные условия (6) предполагают задание в начальный момент времени следующих значений:

$$LI_L(0) = q_1, \quad C_1 U_{C_1}(0) - C_2 U_{C_2}(0) = q_2. \quad (16)$$

Задача оптимального управления в системе (3),(16) состоит в выборе входного напряжения  $u(t) \in L_2(0, T)$ , реализующего минимум функционала энергии инерционных элементов и управления:

$$J(u) = \int_0^T [LI_L^2(t) + C_1 U_{C_1}^2(t) + C_2 U_{C_2}^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Эта задача допускает представление в виде (4),(6),(8) с параметрами (5) и

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = 1.$$

Пучок матриц  $\lambda A + B$  является регулярным. Для несобственных чисел пучка, т.е.

$$\lambda \neq (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2, \\ a = L \frac{g_1 + g_2}{C_1 + C_2} + \frac{r}{L}, \quad b = \frac{r(g_1 + g_2) + 1}{L(C_1 + C_2)},$$

существует обратная матрица

$$(\lambda A + B)^{-1} = \\ = d^{-1}(\lambda) \begin{pmatrix} d_2(\lambda) + d_3(\lambda) & -1 & -d_3(\lambda) \\ 1 & d_1(\lambda) & d_1(\lambda)d_3(\lambda) \\ -1 & -d_1(\lambda) & d_1(\lambda)d_2(\lambda) + 1 \end{pmatrix},$$

$$d_1(\lambda) = \lambda L + r, \quad d_{j+1}(\lambda) = \lambda C_j + g_j, \quad j = 1, 2,$$

$$d(\lambda) = d_1(\lambda)[d_2(\lambda) + d_3(\lambda)] + 1.$$

Находим матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-C_2}{C_1 + C_2} \\ 0 & 1 & \frac{C_1 g_2 - C_2 g_1}{C_1 + C_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ 0 & 0 & \frac{C_2 g_1 - C_1 g_2}{C_1 + C_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача (14) принимает вид

$$\frac{d}{dt} [A' p(t)] = B' p(t) - N_1 x(t), \\ \text{п.в. } t \in [0, T], \quad A' p(T) = 0. \quad (17)$$

В силу теоремы 2 задача (15),(17) имеет единственное решение  $x(t) = x_*(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^3)$ ,  $p(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^3)$ , оптимальное управление строится по формуле  $u_*(t) = p_3(t)$ . Сделав замену переменных

$$p_3(t) = e(t) - x_2(t) - x_3(t), \quad y(t) = C_1 x_2(t) - C_2 x_3(t),$$

$$x_2(t) = \frac{y}{C_1 + C_2} + C_2 \alpha p_1(t) + C_2 \beta p_2(t) + \alpha e(t),$$

$$x_3(t) = \frac{-y}{C_1 + C_2} + C_1 \alpha p_1(t) + C_1 \beta p_2(t) + \alpha \frac{C_1}{C_2} e(t),$$

$$\alpha = \sigma C_2, \quad \beta = \sigma(C_2 g_1 - C_1 g_2),$$

$$\sigma = \frac{1}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_1 C_2)},$$

задачу (15),(17) можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} + \varphi(t), \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \quad (18)$$

$$x_1(0) = \frac{q_1}{L}, \quad y(0) = q_2, \quad p_1(T) = p_2(T) = 0,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{r}{L} & -1 & \frac{-C_2 \alpha}{L} & \frac{-C_2 \beta}{L} \\ 1 & \frac{-g_1 - g_2}{C_1 + C_2} & -C_2 \beta & \gamma \\ -1 & 0 & \frac{r}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{C_1 + C_2} & \frac{1}{C_1 + C_2} & \frac{g_1 + g_2}{C_1 + C_2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \varphi_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + C_1 C_2}{L(C_1 + C_2 + C_1 C_2)} e(t) \\ -(C_1 + C_2) \beta e(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \beta(C_1 g_2 - C_2 g_1).$$

Решение задачи (18) запишем с помощью формулы Коши:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \exp(\Lambda t) \begin{pmatrix} q_1 \\ L \\ q_2 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \exp(\Lambda(t-\tau)) \varphi(\tau) d\tau,$$

где неизвестные значения  $p_1(0), p_2(0)$  найдем с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ L \\ q_2 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^T \exp(\Lambda(T-\tau)) \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \\ \varphi_4(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 5. Выводы

На примере электрического четырехполюсника, изображенного на рисунке, в работе поставлена задача оптимального управления в системе, описывающей переходные режимы в электрических цепях. Качество управления характеризует квадратичный функционал энергии. Так как математические модели переходных режимов описываются линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, то для этих уравнений изучается задача оптимального управления с квадратичным функционалом качества. Получены новые теоремы существования и единственности оптимального управления, из формулировок и доказательств которых вытекают конструктивные алгоритмы и явные формулы для вычисления оптимального управления и оптимального состояния. Показано, как эти теоремы применяются в модельной электрической

цепи для расчета входного (управляющего) напряжения, минимизирующего функционал энергии.

**Литература:** 1. *Bender D. J. and Laub A. J.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. Vol. AC-32, No. 6. P. 672–688. 2. *Kunkel P., Mehrmann V.* The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients. // Math. Control Signals Systems. 1997. Vol. 10. P. 247–264. 3. *Kurina G.A., Mörz R.* On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42, No. 6. P. 2062–2077. 4. *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Об оптимальном управлении системами, описываемыми неявными эволюционными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, №3. С. 416-424. 5. *Власенко Л.А., Руткас А.Г., Самойленко А.М.* Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, № 8. С. 1027-1034. 6. *Власенко Л.А.* Импульсные дифференциально-алгебраические уравнения в математических моделях электрических цепей // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 32. С. 27-31. 7. *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785-795. 8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с. 9. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 384 с.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Поступила в редколлегию 14.01.2016

**Власенко Лариса Андреевна**, д-р техн. наук, профессор кафедры прикладной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61001, Харьков, ул. Плехановская, 2/5, кв. 29, тел.: (057) 732 28 35.

**Руткас Анатолий Георгиевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61001, Харьков, ул. Плехановская, 2/5, кв. 29, тел.: (057) 732 28 35.