

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КОНЧАКОВСКАЯ О.С., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается задача расчета микроэлектромеханической системы, математической моделью которой служит нелинейная краевая задача для эллиптического уравнения. На основании метода последовательных приближений строится алгоритм получения двусторонних приближений к точному решению задачи. Эффективность разработанного численного метода иллюстрируется сериями вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: микроэлектромеханическая система, нелинейное эллиптическое уравнение, двусторонние приближения, инвариантный конусный отрезок, положительное решение.

Введение

Актуальность исследования. Современные исследования микросистемной техники (МСТ) сконцентрированы на создании и применении разнообразных методов математического моделирования, целью которых является описание механических (деформация), электромагнитных (проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемость), оптических и других свойств [5]. Создаваемые микроразмерные устройства широко применяются в различных областях науки и техники: авиационной технике, автомобилестроении, робототехнике, атомной энергетике, системах связи, медицине.

Для наиболее точных и сложных моделей основными методами решения являются численные методы, требующие проведения большого объема вычислений на ЭВМ. Эти методы позволяют добиться хорошего количественного и даже качественного результата в описании модели, однако они не лишены недостатков. Так, не всегда удается оценить погрешность полученных численных решений. Свободными от этого недостатка являются численные методы, которые дают итерационную последовательность, имеющую двустороннюю сходимость. Это позволяет апостериорно оценить погрешность приближенного решения на каждом шаге итерационного процесса.

Таким образом, разработка и совершенствование существующих средств математического моделирования и численного анализа задач, возникающих при проектировании МСТ, является актуальной научной задачей.

В данной работе рассмотрена проблема математического моделирования и численного анализа первой краевой задачи для нелинейного эллиптического урав-

нения второго порядка. Эта задача служит математической моделью работы одного микросистемного устройства. Для ее решения предлагается применить метод последовательных приближений с двусторонним характером сходимости к точному решению задачи.

Цель и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка и программная реализация метода численного анализа задачи математического моделирования процессов в простейших микросистемных устройствах.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- сформулировать задачу математического моделирования и численного анализа процессов в микросистемном устройстве;
- разработать метод решения задачи расчета микросистемного устройства;
- провести вычислительные эксперименты для различных параметров модели;
- провести анализ адекватности полученного решения.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [2, 3].

1. Постановка задачи

Применение МСТ для различных областей физики обусловило разработку микроэлектромеханических (МЭМС), микрооптоэлектромеханических (МОЭМС), микроакустоэлектромеханических (МАЭМС) и других систем.

Микроактюатор (составная часть МЭМС) – это устройство, которое преобразует энергию в управляемое движение. Электростатический актюатор является одним из самых распространенных типов актюаторных элементов МСТ и состоит из подвижного и неподвижного электродов. В качестве подвижного электрода выступают упругие диэлектрические пластины и мембраны, которые покрываются тонкой металлизированной пленкой. Принцип действия данных актюаторов основан на возникновении электростатической силы между подвижным и неподвижным электродами (рис. 1). При подаче отклоняющего напряжения между электродами возникает электростатическое взаимодействие и подвижный электрод притягивается к неподвижному, вследствие чего может произойти слипание электродов. Обратный процесс называется устойчивым состоянием системы.

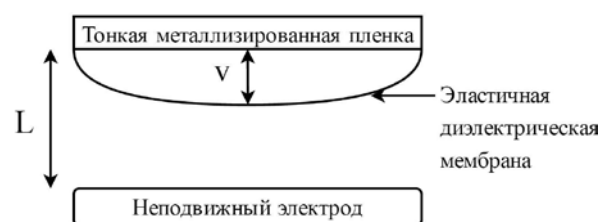


Рис. 1. Схема работы простейшей электростатической МЭМС

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого тела и приложенных к нему внешних «мертвых» сил, т.е. сил, сохраняющих величину и направление при деформациях системы; тело считаем закрепленным таким образом, что его перемещения как жесткого целого исключены [1].

Полная потенциальная энергия такой консервативной силы в нагруженном состоянии определяется суммой

$$E = R + W ,$$

где R – потенциальная энергия деформации тела; W – потенциал внешних сил.

Электростатические методы активации устройств основаны на законе Кулона [9]: сила взаимодействия неподвижных зарядов q_1 и q_2 прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, который в приведенных единицах измерения имеет вид

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} .$$

В общем случае, когда электрические заряды распределены неравномерно по двум электродам, расстояние между электродами равно

$$r = L + v(\mathbf{x}) ,$$

где $L > 0$ – расстояние между двумя электродами при отсутствии деформаций мембраны; $v(\mathbf{x})$ – величина деформации мембраны.

Потенциал внешних сил определяется равенством

$$W = - \int_{\Omega} \frac{a \cdot V^2}{L + v(\mathbf{x})} d\mathbf{x} ,$$

здесь $a > 0$ – константа, которая определяет относительную диэлектрическую проницаемость среды; Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^2 .

Если в системе присутствуют упругие деформации, то $v \neq 0$.

Потенциальная энергия деформации – это энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации.

В соответствии с законом сохранения энергии без учета её рассеивания (диссипации) потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела. Известно, что потенциальная энергия деформаций состоит из суммы потенциальной энергии изменения формы и потенциальной энергии изменения объема.

Потенциальная энергия изменения формы – это энергия, накапливаемая за счет изменения формы элементарного объема, которая определяется как

$$P = \int_{\Omega} \frac{T}{2} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} ,$$

где $T > 0$ – константа напряжения.

Потенциальная энергия изменения объема – это энергия, накапливаемая за счет изменения объема рассматриваемого элементарного объема (одинакового изменения всех его размеров без искажения формы), которая равна

$$Q = \int_{\Omega} \frac{D}{2} |\Delta v|^2 d\mathbf{x} ,$$

где $D = \frac{2 \cdot h^3 \cdot Y}{3(1 - \nu^2)}$; h – толщина мембраны; Y – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Таким образом, полная потенциальная энергия системы равна

$$E = P + Q + W = \int_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2} |\nabla v|^2 + \frac{D}{2} |\Delta v|^2 - \frac{a \cdot V^2}{L + v} \right\} d\mathbf{x} .$$

По теореме Лагранжа состояние равновесия консервативной механической системы устойчиво тогда и только тогда, когда её полная потенциальная энергия минимальна [7]. Необходимое условие минимума функционала E (уравнение Эйлера-Остроградского) имеет вид

$$T \Delta v - D \Delta^2 v = \frac{a \cdot V^2}{(L + v)^2} \text{ в } \Omega , \quad (1)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 . \quad (2)$$

Поскольку нижний электрод тонкий, то его толщиной можно пренебречь относительно его размеров ($D = 0$), и задача (1), (2) примет вид

$$T \Delta v = \frac{a \cdot V^2}{(L + v)^2} \text{ в } \Omega ,$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 .$$

Тогда после замены $v = -u$ получим нелинейную краевую задачу

$$-\Delta u = \frac{f(x_1, x_2)}{(L - u)^2} \text{ в } \Omega ,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

где $f(x_1, x_2) = \frac{a \cdot V^2}{T}$.

Пусть $L = 1$, $f(x_1, x_2) = \lambda$. Тогда получим задачу

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{(1 - u)^2} \text{ в } \Omega , \quad (3)$$

$$0 < u < 1 \text{ в } \Omega, u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

2. Метод численного анализа

Для решения задачи (3), (4) воспользуемся методом двусторонних приближений [4, 6].

На конусе K неотрицательных в $C(\bar{\Omega})$ функций введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение

$$u = Tu,$$

где

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} ds,$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\Delta$.

Рассмотрим некоторые свойства оператора T .

Оператор T является непрерывным и монотонным на конусе K , так как

$$\forall u_1, u_2 \in K \quad u_1 \leq u_2 < 1 \Rightarrow Tu_1 \leq Tu_2.$$

Ввиду монотонности оператора T построим инвариантный конусный отрезок

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\},$$

$$T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Для этого рассмотрим схему последовательных приближений

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u_n(\mathbf{s}))^2} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Положим $v_0 = 0$, $w_0 = \beta = \text{const} \in (0, 1)$. Тогда получим

$$w_1(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{ds}{(1-\beta)^2} = \frac{\lambda u_0(\mathbf{x})}{(1-\beta)^2},$$

$$v_1(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \lambda u_0(\mathbf{x}),$$

где $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$.

Необходимо выбором β достичь выполнения условия

$$w_1 \leq w_0, \text{ т.е. } \frac{\lambda u_0(\mathbf{x})}{(1-\beta)^2} \leq \beta. \text{ Значит, } \beta \text{ определяется системой неравенств}$$

$$\lambda \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta(1-\beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (6)$$

Пусть Ω – круг радиуса R . Функция Грина для круга радиуса R имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$; точки \mathbf{s}^1 – точки, симметричные относительно окружности радиуса R ;

$r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$ – расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{s} , \mathbf{x} и \mathbf{s}^1

соответственно; $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$.

Тогда $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u_0(\mathbf{x}) = \frac{R^2}{4}$. Значит, система неравенств

(6) для определения β принимает вид

$$\frac{\lambda R^2}{4} \leq \beta(1-\beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (7)$$

В работе [8] было доказано, что задача (3), (4) в единичном круге в \mathbf{R}^2 имеет при $0 < \lambda < \frac{4}{9}$ един-

ственное положительное решение, при $\frac{4}{9} \leq \lambda < 0,593\dots$

существует несколько положительных решений, а при $\lambda \geq 0,593\dots$ – задача решений не имеет. Таким образом, задача (3), (4) в круге радиуса R имеет

единственное решение при $\lambda \in \left(0, \frac{4}{9R^2}\right)$.

Вследствие монотонности оператора T справедливы неравенства $0 = v_0 \leq v_1 \leq u^* \leq w_1 \leq w_0 = \beta$.

Продолжая этот процесс, получаем

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq$$

$$\leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема. Оператор $Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} ds$, где Ω –

круг радиуса R , имеет при $\lambda \in \left(0; \frac{4}{9R^2}\right)$ единствен-

ную неподвижную точку на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$, $w_0 = \beta$, $v_0 = 0$, причем β определяется неравенствами (7). Последовательные приближения, формируемые по правилу (5), двусторонне сходятся к неподвижной точке оператора T .

3. Результаты численного анализа

Вычислительный эксперимент для задачи (3), (4) был проведен в круге радиуса $R = 1$. Тогда рассматриваемая задача эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} ds \quad (8)$$

и имеет единственное решение при $\lambda \in \left(0; \frac{4}{9} = 0,4\right)$.

Для вычислительного эксперимента возьмем $\lambda = 0,3$. Тогда итерационный процесс решения уравнения (8) строим по схеме

$$u^{(k+1)}(x) = 0,3 \cdot \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Для определения β воспользуемся соотношениями (7). Получим $0,090710 \leq \beta \leq 0,663889$.

На рис. 2 представлены верхние (непрерывная линия) и нижние приближения (пунктирная линия) при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в сечении $x_2 = 0$.

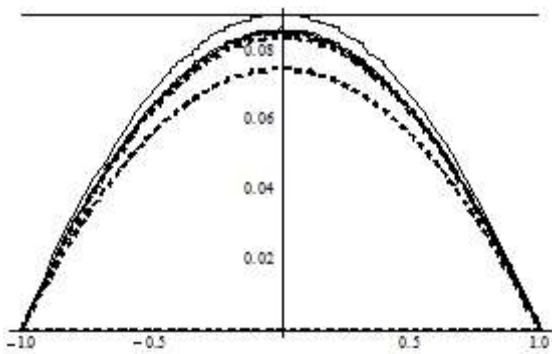


Рис. 2. Графики $w_n(x_1, 0)$ и $v_n(x_1, 0)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

В табл. 1 приведены значения $w_n(x)$ и $v_n(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в точках области $\bar{\Omega}$ с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0, 4}$, $j = \overline{0, 5}$ (значения в остальных четвертях симметричны).

Как видно из табл. 1, в каждой из выбранных точек $v_n(x) \leq w_n(x)$ значения $w_n(x)$ убывают, а значения $v_n(x)$ – возрастают.

Поскольку

$$v_5 \leq u^* \leq w_5, \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} (w_5(x) - v_5(x)) = 0,5 \cdot 10^{-5},$$

то с точностью $0,25 \cdot 10^{-5}$ имеем

$$u^* \approx u_5 = \frac{w_5 + v_5}{2}.$$

В табл. 2 приведены значения приближенного решения $u_5(x)$ с точностью $\varepsilon = 0,25 \cdot 10^{-5}$ в точках области $\bar{\Omega}$ с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0,25i$,

$i = \overline{0, 2}$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $j = \overline{0, 5}$. Поверхность приближенного

решения $u_5(x)$ и его линии уровня представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

Значения нормы приближенного решения задачи (3), (4) с точностью $\varepsilon = 0,25 \cdot 10^{-5}$ в зависимости от параметра λ представлены в табл. 3 и на рис. 5.

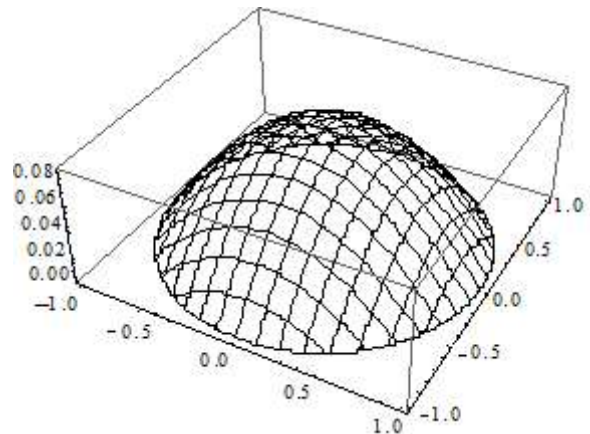


Рис. 3. Поверхность приближенного решения $u_5(x)$

Полученные результаты были доложены на XX Международном молодежном форуме «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 19 – 21 апреля 2016) и на 19 Всеукраинской (14 Международной) студенческой научной конференции по прикладной математике и информатике „СНКПМІ-2016” (Львов, ЛНУ им. И.Франко, 14 – 15 апреля 2016) [2, 3].

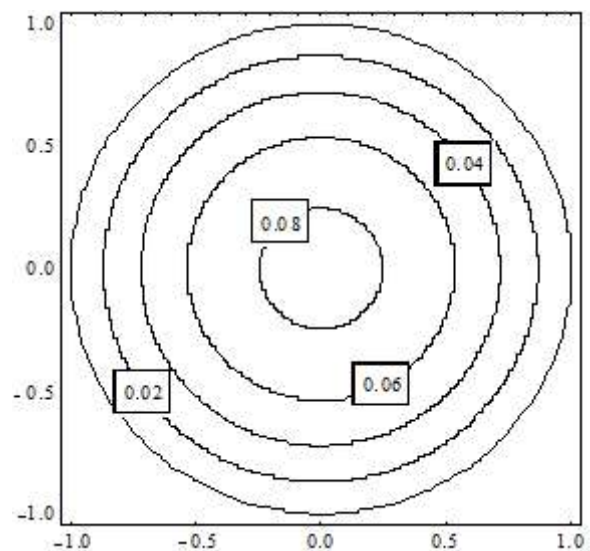


Рис. 4. Линии уровня приближенного решения $u_5(x)$

Таблица 1. Значения $w_n(\mathbf{x})$ и $v_n(\mathbf{x})$ в точках области $\bar{\Omega}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$\rho \backslash \varphi$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0
	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	1
	0,086424	0,086424	0,086424	0,086424	0,086424	0,086424	2
	0,085720	0,085720	0,085720	0,085720	0,085720	0,085720	3
	0,085626	0,085626	0,085626	0,085626	0,085626	0,085626	4
	0,085614	0,085614	0,085614	0,085614	0,085614	0,085614	5
0,25	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0
	0,084816	0,084832	0,084849	0,084848	0,084847	0,084824	1
	0,080543	0,080560	0,080578	0,080580	0,080582	0,080562	2
	0,079895	0,079912	0,079929	0,079931	0,079932	0,079912	3
	0,079809	0,079827	0,079844	0,079845	0,079847	0,079827	4
	0,079798	0,079816	0,079833	0,079835	0,079836	0,0798162	5
0,5	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0,090710	0
	0,067997	0,068044	0,068090	0,068098	0,068106	0,068034	1
	0,063980	0,064026	0,064072	0,064086	0,064100	0,064037	2
	0,063485	0,063530	0,063576	0,063589	0,063602	0,063538	3
	0,063422	0,063467	0,063513	0,063526	0,063539	0,063476	4
	0,0634139	0,063459	0,063505	0,063518	0,0635313	0,063468	5
0	0	0	0	0	0	0	0
	0,075000	0,075000	0,075000	0,075000	0,075000	0,075000	1
	0,084250	0,084250	0,084250	0,084250	0,084250	0,084250	2
	0,085438	0,085438	0,085438	0,085438	0,085438	0,085438	3
	0,085590	0,085590	0,085590	0,085590	0,085590	0,085590	4
	0,085609	0,085609	0,085609	0,085609	0,085609	0,085609	5
0,25	0	0	0	0	0	0	0
	0,070126	0,070140	0,070154	0,070153	0,070152	0,070133	1
	0,078864	0,078581	0,078598	0,078599	0,078600	0,078581	2
	0,079640	0,079657	0,079674	0,079676	0,079677	0,079657	3
	0,079777	0,079794	0,079811	0,079813	0,079814	0,079795	4
	0,079794	0,079812	0,079829	0,079830	0,079832	0,079812	5
0,5	0	0	0	0	0	0	0
	0,056221	0,056259	0,056297	0,056304	0,056310	0,056251	1
	0,062513	0,062557	0,062602	0,062615	0,062627	0,062565	2
	0,063299	0,063344	0,063389	0,063340	0,063416	0,063352	3
	0,063398	0,063444	0,063489	0,063502	0,063516	0,063452	4
	0,063411	0,063456	0,063502	0,063515	0,063528	0,063465	5

Таблица 2. Значения приближенного решения $u_5(\mathbf{x})$ в точках области $\bar{\Omega}$

$\rho \backslash \varphi$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,085612	0,085612	0,085612	0,085612	0,085612	0,085612
0,25	0,079796	0,079814	0,079831	0,079832	0,079834	0,079814
0,5	0,063412	0,063458	0,063504	0,063517	0,063530	0,063467

Таблица 3. Значения нормы приближенного решения в зависимости от параметра λ

λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$
0,02	0,005038	0,22	0,060318	0,42	0,128525
0,04	0,010153	0,24	0,066437	0,44	0,136425
0,06	0,015348	0,26	0,072687	0,46	0,144587
0,08	0,020631	0,28	0,079076	0,48	0,153037
0,10	0,026001	0,30	0,085611	0,50	0,161804
0,12	0,031462	0,32	0,092304	0,52	0,170920
0,14	0,037020	0,34	0,099164	0,54	0,180429
0,16	0,042678	0,36	0,106202	0,56	0,190377
0,18	0,048446	0,38	0,113431	0,58	0,200825
0,20	0,054323	0,40	0,120867	0,592	0,207367

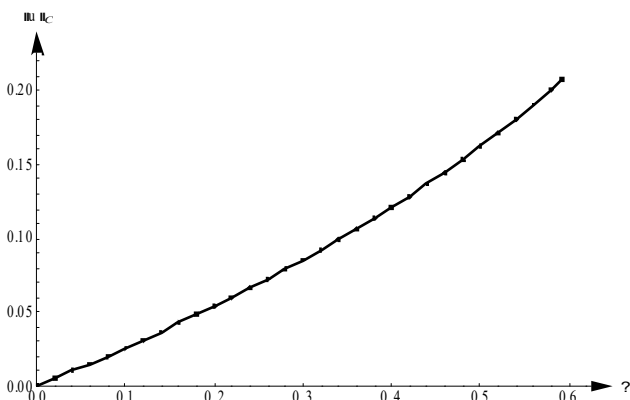


Рис. 5. Значения нормы приближенного решения в зависимости от параметра λ

Выводы

Впервые построены двусторонние приближения к решению первой краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения, возникающего при моделировании электростатических микроэлектромеханических систем. В ходе выполнения исследований также был разработан программный продукт в пакете Mathematica 10, с помощью которого проведен ряд вычислительных экспериментов. Результаты работы могут найти применение в научных исследованиях по физике, химии, биологии, медицине. Этим определяется научная новизна и практическая значимость работы.

Литература: 1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с. 2. Кончаковская О.С. Численный анализ одной нелинейной краевой задачи, моделирующей микроэлектромеханическую систему // Радиоэлектроника и молодёжь в XXI веке: Материалы XX Международного молодёжного форума, 19 – 21 апреля 2016 г. Харьков: ХНУРЭ, 2016. Т. 7. С. 88 – 89. 3. Кончаковська О.С. Чисельний аналіз однієї нелінійної крайової задачі, яка моделює мікроелектромеханічну систему // Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики: Наукові праці XIX Всеукраїнської (XIV Міжнародної) конференції, 14 – 15 квітня 2016 р. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2016. С. 78 – 79. 4. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с. 5. Му-

хуров Н.И., Ефремов Г.И. Электромеханические микроустройства. Минск: Беларус. навука, 2012. 257 с. 6. Онойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с. 7. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с. 8. Y. Guo and N. Ghoussoub. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case. Submitted (2005). 9. F. Lin, Y. Yisong. Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation. A Proceedings of The Royal Society. 05/2007; 463(2081): 1323 – 1337.

Transliterated bibliography: 1. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem. M.: Mashinostroenie, 1978. 312 p. 2. Konchakovskaja O.S. Chislennyj analiz odnoj nelinejnoj kraevoj zadachi, modelirujushhej mikrojelektromehaničeskiju sistemu // Radiojelektроника i molodjozh' v XXI veke: Materialy XXI Mezhdunarodnogo molodjozhnogo foruma, 19 – 21 aprelya 2016 g. Har'kov: KhNURE, 2016. T. 7. P. 88 – 89. 3. Konchakovska O.S. Chysel'nyj analiz odnijei' nelinejnoj' krajovoi' zadachi, jaka modeljuje mikroelektromehaničnu sistemu // Students'ka naukova konferencija z prykladnoi' mate-matyky ta informatyky: Naukovi praci XIX Vseukrai'ns'koi' (XIV Mizhnarodnoi') konferencii', 14 – 15 kvitnja 2016 r. L'viv: LNU im. I. Franka, 2016. P. 78 – 79. 4. Krasnosel'skij M.A. Polozhitel'nye reshenija operatornyh uravnenij. M.: GIFML, 1962. 394 p. 5. Muhurov N.I., Efremov G.I. Jelektromehaničeskie mikroustrojstva. Minsk: Belarus. navuka, 2012. 257 p. 6. Opojcev V.I., Hurodze T.A. Nelinejneje operatory v prostranstvah s konusom. Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1984. 246 p. 7. Cigler G. Osnovy teorii ustojchivosti konstrukcij. M.: Mir, 1971. 192 p. 8. Y. Guo and N. Ghoussoub. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case. Submitted (2005). 9. F. Lin, Y. Yisong. Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation. A Proceedings of The Royal Society. 05/2007; 463(2081): 1323 – 1337.

Поступила в редколлегия 30.04.2016

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Литвин О.Н.

Кончаковская Оксана Сергеевна, студентка гр. СА-12-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование и вычислительная математика, программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Konchakovskaya Oksana Sergeevna, student of Faculty of Applied Mathematics and Management KhNURE. Research interests: mathematical modeling and computational mathematics, programming. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Lenin Ave, 14, phone +38 (057) 7021436.

Sidorov Maxim Victorovich, Ph.D. in Physics and Maths, associate professor, associate professor of Department of Applied Mathematics KhNURE. Research interests: mathematical modeling, numerical methods, mathematical physics, R-functions theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Lenin Ave, 14, phone +38 (057) 7021436.