

## ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ В СЕТЯХ ПИРИНГОВОЙ СВЯЗИ

ПОПОВСКАЯ Е.О., МОСКАЛЕЦ Н.В.

Предлагается математическая модель управления потоком фрагментов в пиринговой сети P2P-TV при передаче видеоконтента с использованием критерия минимума суммарной потери времени на обслуживание  $N$ -фрагментов информационной последовательности. Описывается решение, приводящее к процедуре динамического программирования. Рассматривается влияние различных факторов, влияющих на динамику воспроизведения в пиринговой сети (P2P-TV) при представлении услуги видео по запросу и живого потокового видео.

**Ключевые слова:** пиринговая сеть, видео по запросу, загрузка, скачивание.

**Key words:** peering network, video on demand, downloading.

### 1. Введение

За последние годы наблюдается устойчивый рост пользовательского трафика, составляющего порядка 80 петабайт/мес, из них более половины принадлежит видеотрафику. Особенно быстрыми темпами растет использование P2P-технологии, в частности P2P-TV, предназначенной для просмотра видеоконтента через интернет-TV. Имеется достаточно много разновидностей популярных P2P-сетей: Bit Torrent Live, Torrent Stream, PPLive, UUSee, SopCast [1].

Особенностью P2P-сетей является процедура задействования машин других клиентских пользователей, с которых скачиваются соответствующие видеофрагменты. В живом потоковом видео TV-контент распространяется всем пользователям в режиме реального времени. В процессе предоставления услуги принимается ряд решений, осуществляется большое число управлений: выбор пира, присоединение и отсоединение пира, обмен информацией между пирами, оценка задержек, организация буфера, планирование фрагментов. Соответствующие процедуры выполняют целый ряд управляющих машин: сервер, глобальный и локальные трекеры и др. Планировщиком обеспечивается необходимая координация всех проколов и указанных органов управления в соответствии со своими алгоритмами и выбранными моделями.

В данной статье предпринимается попытка продемонстрировать возможность выбора объединенной математической модели  $x(t)$  – процесса функционирования пиринговой сети и соответствующей универсальной процедуры оптимального управления в технологии P2P-TV. Процесс скачивания какого-либо файла  $x(t)$  сопровождается разбиением его на отдельные фрагменты, получаемые в общем случае от различных пиров.

Планирование процесса фрагментации осуществляется таким образом, чтобы за минимальное время  $t \in T = [t_1, t_f]$  обеспечить предоставление услуги с требуемым качеством. Сам процесс  $x(t)$  на интервале  $T$  представляет собой управляемую последовательность отдельных фрагментов с независимыми значениями на границах стыка. Данная задача относится к классу магистральных, когда управление транспортом осуществляется по выбранным участкам (этапам) и на каждом этапе выбирается лучший режим по скорости, минимизации задержек, уровню затрат [2,3].

### 2. Методы управления потоком фрагментов в одноранговых сетях

Исходящий от источника в сеть поток фрагментов определяется совместным распределением случайных величин  $z_k = t_k - t_{k-1}$ , где  $t_k$  – моменты поступления  $k$ -го фрагмента ( $k \geq 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ ). Очевидно, последовательность фрагментов  $z_k$  образует случайный поток, где для каждого пира значения  $z_k$  независимы в совокупности. Такой поток называют потоком с ограниченным последствием и для его определения достаточно задать набор функций распределения  $F_k(t) = P\{z_k \leq t\}$ ,  $k \geq 1$ .

Частным случаем такого случайного потока является пуассоновский поток, для которого  $F_k(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$ , где  $\lambda$  – интенсивность потока, зависящая от общего числа фрагментов, передаваемых в сети.

В силу спецификации пиринговую сеть можно считать однородной, а экспоненциальный характер функции распределения вероятностей допускает использование для ее исследований методов теории массового обслуживания. Для сетей этого типа характерна мультипликативная форма стационарных вероятностей. Это позволяет достаточно просто находить условия глобального и локального балансов, что составляет основу для исследования и проектирования сети.

Вместе с тем, для модели потока фрагментов при скачивании соответствующего файла методы теории массового обслуживания не подходят, поскольку в данном случае имеет место случайный управляемый поток обслуживания, а не чисто случайный. В нашей задаче необходимо найти оптимальный план (управление) поступления фрагментов от различных пиров, предписывающий каждому  $i$ -му фрагменту время поступления на обслуживание:

$$U = \varphi_{пл}(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

В процессе обслуживания необходимо учесть следующую специфику:

а) случайное время поступления  $i$ -го фрагмента на обслуживание  $t_i^0(\varphi_i)$ , отличающееся от некоего планируемого  $t_i^{пл}$ ;

б) случайное время обслуживания  $i$ -го фрагмента  $\theta_i(\varphi_i)$ .

В результате различных случайных факторов и управляющих воздействий возможны две причины потерь времени, приводящих к соответствующим задержкам:

– потери, связанные с тем, что  $i$ -й фрагмент поступил раньше, чем завершилось его считывание  $\delta_i^0(\varphi_i, U)$ ;

– потери при задержке поступления  $i$ -го фрагмента, если считыватель простаивает  $\delta_i^\Pi(\varphi_i, U)$ .

Суммарные потери времени при обслуживании  $n$ -фрагментов составят:

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^n (m\{\delta_i^0(\varphi_i, U)\} + cm\{\delta_i^\Pi(\varphi_i, U)\}), \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент, учитывающий стоимость потерь;  $m\{\bullet\}$  – знак математического ожидания.

Задача оптимального планирования процесса считывания файла состоит в минимизации функционала  $\Phi(U)$ .

Рассмотрим  $k$ -й шаг процесса. Обслуживание  $k-1$  фрагмента завершается в случайный момент  $t_{k-1}$ , функция распределения вероятностей которого

$$F_{k-1}(t) = P\{t_{k-1} < t\}.$$

Фрагмент  $k$  поступает в случайный момент  $t_k^0$ , функция распределения которого:

$$F_k^0(t) = P\{t_k^0 < t\}.$$

При этом среднее:

$$\int_0^\infty t dF_k^0(t) = t_k^{пл}.$$

Обслуживание  $k$ -го фрагмента начинается в случайный момент времени:

$$t_k^H = \max(t_{k-1}, t_k^0)$$

с функцией распределения:

$$F_k^H(t) = P\{t_k^H < t\} = P\{t_{k-1} < t, t_k^0 < t\}.$$

Значения случайных величин  $t_{k-1}$  и  $t_k^0$  порождаются различными процессами, связанными соответственно с выбором  $k-1$  пира и процессом считывания, что позволяет считать их независимыми, поэтому:

$$F_k^H(t) = F_{k-1}(t)F_k^0(t). \quad (2)$$

Время обслуживания  $k$ -го фрагмента  $\theta_k$  является случайной величиной, заданной функцией распределения

$$\Phi_k(t) = P\{\theta_k < t\},$$

причем  $\theta_k$  не зависит от времени канала обслуживания.

Время конца обслуживания  $k$ -го фрагмента  $t_k$  является композицией двух независимых величин:

$$t_k = t_k^H + \theta_k.$$

С функцией распределения, определяемой интегралом свертки:

$$F_k(t) = \int_0^\infty F_k^H(t - \tau) d\Phi_k(\tau). \quad (3)$$

При известном распределении  $F_{k-1}(t)$  можно определить потери времени для фрагмента  $\delta_k^0$  и для считывателя  $\delta_k^\Pi$  на  $k$ -м шаге управления:

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 0, & \text{при } t_k^0 \geq t_{k-1}, \\ t_{k-1} - t_k^0 & \text{при } t_k^0 < t_{k-1}; \end{cases}$$

$$m\{\delta_k^0\} = \int_0^\infty \int_0^\infty (\tau - t) dF_{k-1}(\tau) dF_k^0(t);$$

$$\delta_k^\Pi = \begin{cases} 0, & t_k^0 \leq t_{k-1}, \\ t_{k-1}^0 - t_k, & t_k > t_{k-1}; \end{cases}$$

$$m\{\delta_k^\Pi\} = \int_0^\infty \int_0^c (t - \tau) dF_{k-1}(\tau) dF_k^0(t).$$

Суммарные потери времени на  $k$ -м шаге зависят от выбора управления на  $k$ -м шаге от функции распределения  $F_{k-1}(t)$ :

$$\begin{aligned} f_k(t_k, F_{k-1}(t)) &= m\{\delta_k^0\} + cm\{\delta_k^\Pi\} =, \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_t^\infty (\tau - t) dF_{k-1}(\tau) + c \int_0^t (t - \tau) dF_{k-1}(\tau) \right] dF_k^0(t) = \\ &= \int_0^\infty \left[ m\{t_{k-1}\} - t + c \int_0^t (t - \tau) dF_{k-1}(\tau) \right] dF_k^0(t), \end{aligned}$$

Функция  $F_{k-1}(t)$  в силу монотонности интегрируема для непрерывного и дискретного распределений, следовательно:

$$\int_0^t (\tau - t) dF_{k-1}(\tau) = \int_0^t F_{k-1}(\tau) d\tau.$$

В результате получаем:

$$f_k(t_k, F_{k-1}(t)) = m\{t_{k-1}\} - t_k + c \int_0^\infty \int_0^t F_{k-1}(\tau) d\tau dF_k^0(t). \quad (4)$$

Полученная функция потерь на  $k$ -м шаге (4) позволяет применить метод динамического программирования. Состояние системы на  $k-1$  шаге характеризуется функцией распределения  $F_{k-1}(t)$ , поэтому уравнение Беллмана имеет вид [3]:

$$S_{k-1}(F_{k-1}(t)) = \min[f_k(t_k, F_{k-1}(t)) + S_k(\varphi_k(t_k, F_{k-1}(t)))] ,$$

где  $F_k(t) = \varphi_k(t, F_{k-1}(t))$  – уравнение состояния в рекуррентной форме, заданной выражениями (2) и (3).

Функция (4) является функцией с монотонным включением переменных

$$f_k(t_k, F_{k-1}(t)) = f_k(t_k, \varphi_{k-1}(t_{k-1}, \varphi_{k-2}(t_{k-2}, \dots, \varphi_1(t_1)) \dots)). \quad (5)$$

Минимизация функционала (1) является задачей Майера, схема которой изложена в [4].

Очевидно, состояние на  $k-1$  шаге, которое характеризуется одной из возможных реализаций функции  $F_{k-1}(t)$ , наиболее существенно зависит от ближайших шагов процесса. Таким образом, можно считать, что  $F_{k-1}(t)$  определяется выбором управления  $t_i$  на  $N-x$  предыдущих шагах:

$$F_{k-1}(t) = F(t_{k-1}, t_{k-2}, \dots, t_{k-N}).$$

Если управление  $t_i$  аппроксимируется  $m$  дискретными значениями, то число различных комбинаций управления на  $N$  шагах:

$$M = m^N,$$

где состояние  $F_{k-1}(t)$  может принимать  $M$  соответствующих дискретных значений.

Конкретные значения  $N$  и  $M$  выбираются после корреляционного анализа управляемого процесса с учетом требуемой точности.

Функции  $F_k^0(t)$  и  $\Phi_k(t)$  определяются по статистическим данным, коррекция функций позволяет адаптировать систему с учетом опыта предыдущего планирования. Для реализации данного алгоритма следует представить (2), (3) и (4) в дискретной форме, заменить знаки интегралов соответствующими суммами.

### 3. Анализ динамики пиринговой сети

Особую популярность пиринговые сети обрели при представлении услуги видео по запросу и живого потокового видео. Преимуществом видео по запросу является более высокое качество воспроизведения, которое можно смотреть в любом месте в любое время. Недостаток – необходимость наличия буфера большого размера для хранения всего файла. Живое потоковое видео – это видео реального времени, что во многих случаях является критично важным. Рассмотрим влияние различных факторов, влияющих на динамику воспроизведения P2P-TV [5].

Динамические характеристики пиринговой сети определяются скоростью скачивания контента  $V_d$  (download) и скоростью его загрузки  $V_u$  (upload). Для конкретного пира  $P_i$  эти характеристики определяются

$$\begin{aligned} V_d &= d\lambda_d(t)/dt, \\ V_u &= d\lambda_u(t)/dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda_d$ ,  $\lambda_u$  – соответственно интенсивности потоков скачивания и загрузки.

В соотношениях баланса между скоростями загрузки и скачивания равенство определяет скорость загрузки видеосервера [6]:

$$\int_0^{N(t)} V_u(t, v) dv + U = \int_0^{N(t)} V_a(t, v) dv, \quad (7)$$

где  $U$  – скорость загрузки видеосервера.

Каждый из  $i$ -пиров имеет свою стратегию поведения. В частности, возможна полностью эгоистическая стратегия, при которой пир только скачивает информацию со скоростью  $V_{ui}$ , по другим – не загружает  $V_{ui} = 0$ . Степень эгоизма пира определяется отношением скоростей:

$$S(t) = V_u(t)/V_d(t).$$

Показатель  $S(t)$  может изменяться в пределах от  $S_i = 0$  до достаточно больших чисел. При  $S_i \geq 1$  соответствующий пир демонстрирует щедрую альтруистическую стратегию. Очевидно, качество работы пиринговой сети в целом определяется значениями данного показателя, приведенного к текущему числу активных пиров:

$$Q(t) = \frac{1}{N_i(t)} \sum_{i=1}^N S_i(t), \quad (8)$$

где  $N$  – число активных пиров, переменная величина, от которой зависит качество  $Q(t)$ . При достаточно большом числе пиров можно заменить сумму на интеграл, а  $N$  – на  $N(t)$ . В этом случае (8) представляется в виде

$$Q(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{N(t)} S_i(t) t_1 v dv. \quad (9)$$

Получим явную зависимость изменения качества  $Q(t)$  от параметров. Для этого найдем производную функции  $Q(t)$ . Дифференцирование сложной функции нескольких переменных под знаком интеграла представляет собой сложную задачу, особенно для случая, когда пределы интегрирования зависят от параметров. При нахождении производной предположим, что функция  $N(t)$  – непрерывна на интервале интегрирования и имеет непрерывные производные. С учетом этого общее выражение дифференциала имеет вид [7]:

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y). \quad (10)$$

В результате дифференцирования (8) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= -\frac{N'(t)}{N(t)} Q(t) + \frac{1}{N(t)} \int_0^{N(t)} \frac{\partial S(t, v)}{\partial t} dv + \\ &+ \frac{N'(t)}{N(t)} S(t, N(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) может быть упрощено с учетом особенностей пиринговой сети. Примем во внимание тот факт, что вновь включающийся в сеть пир еще не имеет ресурса для скачивания, т.е.  $S(t, v) = S(t, N(t)) = 0$  при  $N(t) = 0$ .

В результате производная (11) примет вид:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{N'(t)}{N(t)}Q(t) + \frac{1}{N(t)} \int_0^{N(t)} \frac{\partial S(t, v)}{\partial t} dv. \quad (12)$$

В стационарном состоянии пиринговой сети скорость потоковой передачи  $V(t)$  постоянна. Очевидно, это допущение с увеличением числа пиров становится все более справедливым за счет усреднения. Поэтому можно осуществить замену:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{N'(t)}{N(t)}Q(t) + \frac{1}{N(t)} \cdot \frac{1}{V_d} \int_0^{N(t)} \frac{\partial V_u(t, v)}{\partial t} dv. \quad (13)$$

где  $V_d \equiv V_d(t)$  – предположение о постоянстве скорости скачивания.

В условиях баланса выполняется равенство, определяющее реакцию сети:

$$\left( \int_0^{N(t)} \frac{\partial V_u(t, v)}{\partial t} dv \right) dt = -V_d N'(t) dt. \quad (14)$$

Отсюда

$$N'(t) = \frac{1}{V_d} \int_0^{N(t)} \frac{\partial V_u(t, v)}{\partial t} dv. \quad (15)$$

Заменяя  $N'(t)$ , из (12) получаем

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{N'(t)}{N(t)} \cdot Q + \frac{N'(t)}{N(t)}. \quad (16)$$

Уравнение выполняется при любых  $t$ . Заменяя  $Q(t)$  и  $N(t)$  на  $Q(t_0)$ ,  $N(t_0)$  получаем

$$Q(t) = 1 - \frac{N(t_0)(1 - Q(t_0))}{N(t)}. \quad (17)$$

Очевидно, с увеличением  $N(t)$  показатель качества  $Q(t) \rightarrow 1$ .

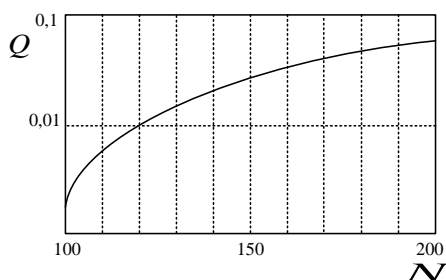
С учетом  $V_d(t, v) = V_d$  можно упростить условие баланса (14):

$$\int_0^{N(t)} V_u(t, v) dv + U = N(t) \cdot V_d. \quad (18)$$

С учетом (8) получаем

$$Q(t) = 1 - \frac{U}{V_d \cdot N(t)}. \quad (19)$$

Причиной монотонного возрастания показателя  $Q(t)$  является все возрастающее количество предложений на скачивание (рисунок).



Качественная характеристика роста скорости загрузки в пиринговой сети с увеличением числа активных пиров

Особенно важно это для вновь включающихся пиров у которых еще отсутствуют видеоматериалы, которыми он мог бы поделиться с другими.

#### 4. Выводы

1. Не удалось воспользоваться теорией массового обслуживания, поскольку имеет место управляемый поток фрагментов, а не чисто случайный поток.

С использованием критерия минимума суммарной потери времени на обслуживание  $N$ -фрагментов информационной последовательности получено решение, приводящее к процедуре динамического программирования.

2. Проведен анализ показателей качества пиринговой сети на основе использования показателя отношения скоростей скачивания и загрузки приведенных к текущему числу активных пиров, в результате которого получена аналитическая зависимость качества пиринговой P2P сети, транслирующей живое потоковое видео от составляющих компонент данной сети. Получена качественная характеристика роста скорости загрузки в пиринговой сети с увеличением числа активных пиров.

3. Пиринговые P2P интернет-сети предоставляют весьма популярную услугу по доставке TV-контента в реальном времени. В целях повышения качества услуг пользователям рекомендуется не уходить быстро из сети, этим самым предоставляя возможность другим пирам скачивать необходимые фрагменты.

**Литература:** 1. Cisco Visual Networking Index: Forecast and Methodology. 2012-2017. Cisco Public. 2013. 2. Zhi-Hui Lu, Ye Wang, and Yang Richard Yang. An Analysis and Comparison of CDN-P2P-hybrid Content Delivery System and Model // JCM. 2012. 7(3). P. 232-245. 3. Bellman Richard. Dynamic programming. Princeton University Press. 1957. 363 p. 4. Моисеев, Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. Монография. [Текст] / Н.Н. Моисеев. М.: Наука, 1971. 428 с. 5. Setton E., Girod B. Peer-to-Peer Video Streaming // Springer. 2007. 150 p. 6. Popovskij V., Barkalov A., Titarenko L. Control and Adaptation in Telecommunication Systems. Berlin Heidelberg Springer-Verlag, 2011. 173 p. 7. Бронштейн, И.И. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.И. Бронштейн, К.Л. Семендяев. М.: Наука, 1986. 608 с.

#### Транслитерованный список литературы.

1. Cisco Visual Networking Index: Forecast and Methodology. 2012-2017. Cisco Public. 2013. 2. Zhi-Hui Lu, Ye Wang, and Yang Richard Yang. An Analysis and Comparison of CDN-P2P-hybrid Content Delivery System and Model // JCM. 2012. 7(3). P.232-245. 3. Bellman Richard. Dynamic programming. Princeton University Press. 1957. P.363. 4. Moiseev, N.N. Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem. Monografija. [Tekst] / N.N. Moiseev. M. Nauka. 1971. 428 s.

5. *Setton E., Girod B. Peer-to-Peer Video Streaming // Springer. 2007. 150 p.*
6. *Popovskij V., Barkalov A., Titarenko L. Control and Adaptation in Telecommunication Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 173 p.*
7. *Bronshitejn I.I. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vtuzov [Tekst] / I.I.Bronshitejn K.L., Semendjaev; M.: Nauka, 1986. 608 s.*

Поступила в редколлегию 15.04.2017

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Безрук В.М.

**Поповская Екатерина Олеговна**, ассистент кафедры Инфокоммуникационной инженерии ХНУРЭ. Научные интересы: сети передачи информации. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки 14, тел. +380675701213.

**Москалец Николай Вадимович**, канд. техн. наук, доцент кафедры Инфокоммуникационной инженерии ХНУРЭ. Научные интересы: беспроводная и мобильная связь. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Науки 14, тел.: +380675701213.

**Поповская Екатерина Олеговна**, assistant of Department «Infocommunication engineering», Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: communication networks. Address: ave. Nauky, 14, Kharkiv, 61166, Ukraine, tel.: +38068-759-60-75

**Moskalets Mykola Vadymovych**, associate professor of Department "Infocommunication engineering", Kharkiv National University of Radioelectronics. Scientific interests: wireless and mobile communication. Address: Nauky ave. 14, Kharkiv, 61166, Ukraine, tel.: +38068-759-60-75.