УДК 519.63 : 532.5

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ *R*-ФУНКЦІЙ ДО АНАЛІЗУ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

ПОДГОРНИЙ О.Р., СИДОРОВ М.В.

Розглядається стаціонарна фільтраційна течія у кусково-однорідному ґрунті. Для крайової задачі відносно функції течії відповідно до методу *R*-функцій будується повна структура розв'язку та обґрунтовується застосування методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти структурної формули.

Ключові слова: закон Дарсі; фільтраційна течія; кусково-однорідне середовище; метод R-функцій; метод Рітца.

Key words: Darcy's law; fluid flow through porous media; a piecewise homogeneous media; R-function's method; Ritz method.

Вступ. Течії рідини в пористому середовищі (фільтраційні течії) широко розповсюджені у природі [14]. До розгляду таких течій приходять при дослідженні процесів зрошення чи осушення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд тощо. Серед найбільш уживаних методів чисельного аналізу фільтраційних течій слід відзначити такі методи: сіток, скінченних елементів, мажорантних областей, суматорних подань, фіктивних областей [4 – 7, 9, 10]. Область фільтрації може мати складну геометричну форму, що призводить до втрати точності при чисельному розв'язанні відповідних задач математичної фізики зазначеними методами. Найбільш точно і повно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, яка міститься у постановці задачі математичної фізики, дозволяє структурний метод *R*-функцій [8, 15]. Для чисельного аналізу задач фільтрації метод *R*-функцій було застосовано у [1 – 3, 17], але в них було розглянуто лише задачі фільтрації під гідротехнічними спорудами. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [12, 13].

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій є актуальною науковою задачею.

1. Мета та задачі дослідження. *Метою* роботи є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних фільтраційних течій у кусково-однорідному ґрунті. Для досягнення поставленої мети необхідно:

– провести аналіз постановки крайової задачі для функції течії у кусково-однорідному ґрунті;

– для крайової задачі відносно функції течії побудувати на основі методу R-функцій повну структуру розв'язку;

– обґрунтувати застосування варіаційних методів для апроксимації невизначеної компоненти побудованої структурної формули.

2. Постановка задачі. Розглянемо стаціонарну задачу напірної фільтрації у кусково-однорідному ґрунті [9, 10, 14]. Позначимо через $\mathbf{v}=(v_x, v_y)$ вектор швидкості фільтраційного потоку. Вважатимемо виконаним закон Дарсі, відповідно до якого втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації.

Аналіз плоских течій зручно проводити за допомогою функції течії, яка вводиться співвідношеннями

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Нехай область фільтрації Ω обмежена непроникними межами $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_3$, які є лініями течії, та двома межами водойми $\partial\Omega_2$ і $\partial\Omega_4$, які є потенціальними лініями. Крім того, нехай область фільтрації Ω заповнена двома типами ґрунтів, які займають підобласті Ω_1 і Ω_2 ($\bar\Omega=\bar\Omega_1\bigcup\bar\Omega_2$ і $\operatorname{int}\Omega_1\bigcap\operatorname{int}\Omega_2=\varnothing$), а $\partial\Omega_{12}$ є лінією розділу двох ґрунтів. У цьому випадку коефіцієнт фільтрації є кусково-сталою функцією вигляду

$$\kappa(x,y)=\begin{cases}\kappa_1,\ (x,y)\in\Omega_1,\\ \kappa_2,\ (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Тоді функція течії

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\psi_1(x,y),\ (x,y)\in\Omega_1,\\ \psi_2(x,y),\ (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

є розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0 \text{ у } \Omega, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_1}=0,\ \psi\big|_{\partial\Omega_3}=Q, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2}=0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_4}=0, \qquad (4)$$

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=\psi_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\ \left.\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}=\left.\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}, \qquad (5)$$

де $\mathbf{n}$ – нормаль до відповідної ділянки межі.

Умови (5) задаються на лінії розділу двох ґрунтів і є умовами спряження.

Величина Q є невідомою сталою, що задає повні витрати рідини. Для її визначення слід використати інтегральне співвідношення

$$\int\limits_{\partial\Omega_3}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}ds=-H', \qquad (6)$$

де H' – діючий напір.

3. Побудова структури розв'язку. Наявність умов спряження (5) та інтегральної умови (6) стає на заваді застосуванню до задачі (2) – (6) класичних чисельних методів. Застосуємо до розв'язання задачі (2) – (6) структурно-варіаційний метод (метод R-функцій).

Розв'язок задачі (2) – (6) шукатимемо у вигляді

$$\psi(x,y) = Qu(x,y),$$

де $u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1, \\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2, \end{cases}$ – розв'язок задачі

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \text{ у } \Omega, \quad (7)$$

$$u\big|_{\partial\Omega_1}=0,\ u\big|_{\partial\Omega_3}=1, \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_4}=0, \quad (9)$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=u_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\ \left.\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}=\left.\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}, \quad (10)$$

а Q знаходимо з рівності (6):

$$Q=-H'\left(\int\limits_{\partial\Omega_3}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds\right)^{-1}. \quad (11)$$

Відповідно до методу R-функцій побудуємо структуру розв'язку задачі (7) – (10). У роботі [12] доведено, що крайовим умовам (8), (9) задовольняє жмуток функцій

$$u = f-\frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3}+\omega_{2-4}}D_1^{(2-4)}f+$$

$$+\omega_{1-3}\Phi-\frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3}+\omega_{2-4}}D_1^{(2-4)}(\omega_{1-3}\Phi), \quad (12)$$

де $\Phi=\Phi(x,y)$ – невизначена компонента структури, а

$$f(x,y)=\frac{\omega_1(x,y)}{\omega_1(x,y)+\omega_3(x,y)},$$

$$D_1^{(2-4)}g=\frac{\partial\omega_{2-4}}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial\omega_{2-4}}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\omega_{2-4}(x,y)=\omega_2(x,y)\wedge_\alpha\omega_4(x,y),$$

$$\omega_{1-3}(x,y)=\omega_1(x,y)\wedge_\alpha\omega_3(x,y).$$

Тут функції $\omega(x,y)$, $\omega_i(x,y)$, $i=1,2,3,4$, побудовані за допомогою конструктивного апарату теорії *R*-функцій [15] такі, що:

$$\omega(x,y)=0 \text{ на } \partial\Omega;\ \omega(x,y)>0 \text{ у } \Omega;\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=-1,$$

$$\omega_i(x,y)=0 \text{ на } \partial\Omega_i;\ \omega(x,y)>0 \text{ у } \Omega\cup(\partial\Omega\setminus\partial\Omega_i);$$

$$\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_i}=-1,\ i=1,2,3,4.$$

Для того щоб задовольнити умовам спряження (10), розглянемо два випадки: коли межа кожної з підобластей Ω_1 і Ω_2 має непустий перетин з межею $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3\cup\partial\Omega_4$ області Ω (рис. 1) і коли ґрунт першого типу містить в собі включення ґрунту другого типу, тобто коли межа підобласті Ω_2 не перетинається з $\partial\Omega$ (рис. 2).

Нехай $\omega_{12}=0$ – нормалізоване рівняння лінії розділу ґрунтів $\partial\Omega_{12}$.

У випадку, зображеному на рис. 1, для того, щоб задовольнити умовам спряження (10), зробимо у структурі (12) заміну змінних [15]:

$$x\mapsto x+\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\cdot\frac{\omega^2|\omega_{12}|}{\omega^2+\omega_{12}^2}\cdot\frac{\partial\omega_{12}}{\partial x}, \quad (13)$$

$$y\mapsto y+\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\cdot\frac{\omega^2|\omega_{12}|}{\omega^2+\omega_{12}^2}\cdot\frac{\partial\omega_{12}}{\partial y}. \quad (14)$$

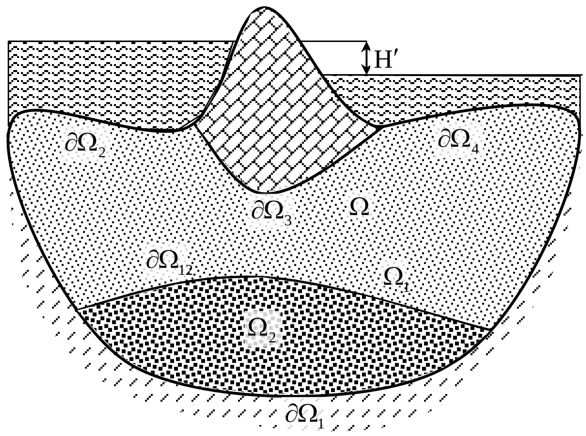

Рис. 1

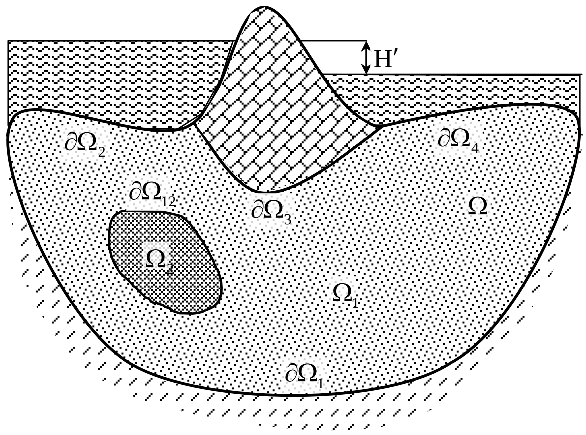

Рис. 2

Тоді отримаємо повну структуру розв'язку задачі (7) – (10), яка при будь-якому виборі невизначеної компоненти Φ точно задовольняє всім крайовим умовам (8) – (10).

Для того щоб задовольнити умовам спряження (10) у другому випадку (див. рис. 2), скористаємося підходом [18]. Функцію $u(x,y)$ шукатимемо у вигляді

$$u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}B(\Phi), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B(\Phi)-A\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\qquad(15)$$

де $B(\Phi)$ визначається правою частиною структури (12); $\omega_{12}=0$ – нормалізоване рівняння лінії розділу ґрунтів $\partial\Omega_{12}$, причому $\omega_{12}>0$ в області Ω_2; а оператор $D_1^{(1-2)}$ визначається рівністю

$$D_1^{(1-2)}=\frac{\partial\omega_{12}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega_{12}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$$

і має властивість

$$D_1^{(1-2)}u\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}},$$

де $\mathbf{n}$ – нормаль до $\partial\Omega_{12}$, яка смпрямована в Ω_2. Тоді

$$D_1^{(1-2)}\omega_{12}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{\partial\omega_{12}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=1.$$

Помітимо, що функція вигляду (15) задовольняє на $\partial\Omega_{12}$ першій з умов спряження (10) при будь-якому виборі сталої A. Тоді сталу A слід обрати такою, щоб задовольнити другій з умов спряження (10). Матимемо

$$\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{1}{\kappa_1}D_1^{(1-2)}u_1\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{1}{\kappa_1}D_1^{(1-2)}(B(\Phi))\Big|_{\partial\Omega_{12}},$$

$$\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{1}{\kappa_2}D_1^{(1-2)}u_2\Big|_{\partial\Omega_{12}}=$$

$$=\frac{1}{\kappa_2}\Big(D_1^{(1-2)}(B(\Phi))-AD_1^{(1-2)}\omega_{12}\cdot D_1^{(1-2)}(B(\Phi))-$$

$$-A\omega_{12}D_1^{(1-2)}(D_1^{(1-2)}(B(\Phi)))\Big)\Big|_{\partial\Omega_{12}}=$$

$$=\frac{1}{\kappa_2}(1-A)D_1^{(1-2)}(B(\Phi))\Big|_{\partial\Omega_{12}}.$$

Тоді

$$\frac{1}{\kappa_1}=\frac{1}{\kappa_2}(1-A),$$

звідси

$$A=1-\frac{\kappa_2}{\kappa_1}=\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1}.$$

Отже, формула

$$u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}B(\Phi), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B(\Phi)-\dfrac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1}\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}\qquad(16)$$

визначає загальну повну структуру розв'язку крайової задачі (7) – (10).

4. Апроксимація невизначеної компоненти методом Рітца. У задачі (7) – (10) зробимо заміну

$$u=\varphi+v,$$

де $\varphi=f-\dfrac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3}+\omega_{2-4}}D_1^{(2-4)}f$, а v – нова невідома функція. Зауважимо, що у випадку ситуації, зображеної на рис. 1, аргументи у функції φ мають бути замінені за формулами (13), (14).

Тоді функція $v(x,y)=\begin{cases}v_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ v_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$ буде розв'язком крайової задачі

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=F \text{ у } \Omega,\qquad(17)$$

$$v\big|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_4}=0,\qquad(18)$$

$$v_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=v_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\quad \frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}},\qquad(19)$$

де $F=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$.

З задачею (17) – (19) пов'яжемо оператор A цієї крайової задачі, який діє у просторі $L_2(\Omega)$ за правилом

$$Av=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\right).\qquad(20)$$

Вважатимемо, що область визначення D_A оператора A вигляду (20) складається з тих функцій з $L_2(\Omega)$, які належать множині $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}\setminus\partial\Omega_{12})$ та задовольняють крайові умови (18) і умови спряження (19). Зрозуміло, що D_A – лінеал.

З'ясуємо, які властивості має оператор A вигляду (20). Зрозуміло, що A – лінійний оператор. Розглянемо тепер скалярний добуток (Av,w), де $v,w\in D_A$. Тут

$$v(x,y)=\begin{cases}v_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ v_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$$

$$w(x,y)=\begin{cases}w_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ w_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Застосовуючи першу формулу Гріна [11, 16], отримаємо, що

$$(\mathrm{Av},\mathrm{w})=\iint_\Omega\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{w}dxdy=$$

$$=\iint_{\Omega_1}\frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\iint_{\Omega_2}\frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)dxdy-$$

$$-\int_{\partial\Omega_{12}}\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}_{12}}w_1ds-\int_{\partial\Omega_{12}}\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}_{21}}w_2ds-\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}wds,$$

де $\mathbf{n}_{12}$ – нормаль до $\partial\Omega_{12}$, зовнішня по відношенню до Ω_1, а $\mathbf{n}_{21}$ – нормаль до $\partial\Omega_{12}$, зовнішня по відношенню до Ω_2

Інтеграл за $\partial\Omega$ дорівнюватиме нулеві, оскільки $v, w\in D_A$, а отже, $w\big|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3}=0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_4}=0$

і

$$\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}wds=\int_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}wds+\int_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_4}\frac{1}{\kappa}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}wds.$$

Для спрощення інтегралів за $\partial\Omega_{12}$ скористаємося тим, що $\mathbf{n}_{12}=-\mathbf{n}_{21}$ та функції v і w задовольняють умовам спряження (19), тобто

$$v_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=v_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\ \left.\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}=\left.\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}},$$

$$w_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=w_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\ \left.\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}=\left.\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}.$$

Тоді

$$\int_{\partial\Omega_{12}}\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}_{12}}w_1ds+\int_{\partial\Omega_{12}}\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}_{21}}w_2ds=$$

$$=\int_{\partial\Omega_{12}}\left(\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{n}_{12}}w_1-\frac{1}{\kappa_2}\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{n}_{12}}w_2\right)ds=0.$$

Отже,

$$(\mathrm{Av},\mathrm{w})=\iint_\Omega\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy \qquad (21)$$

і A – симетричний оператор.

Додатність оператора A випливає з того, що для всіх $v\in D_A$

$$(\mathrm{Av},\mathrm{v})=\iint_\Omega\frac{1}{\kappa}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\ge 0,$$

причому через умови (11) рівність $(\mathrm{Av},\mathrm{v})=0$ можлива лише, якщо $v=0$.

Додатна означеність оператора A доводиться аналогічно тому, як це було зроблено у [13], при цьому для всіх $v\in D_A$ матиме місце нерівність

$$(\mathrm{Av},\mathrm{v})\ge(c\mu)^{-1}\|v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де $\mu=\max\{\kappa_1,\kappa_2\}$, а стала $c>0$ визначається з нерівності [16]

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}\le c\left\{\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_{\Gamma_1}u^2ds\right\},$$

яка має місце для функцій u з простору Соболєва $W_2^1(\Omega)$. Тут Ω – область з межею Ліпшиця $\partial\Omega$; Γ_1 – відкрита частина межі $\partial\Omega$ області Ω додатної міри Лебега; $c>0$ – стала, залежна тільки від області Ω і від Γ_1.

Введемо на D_A енергетичний добуток $[v, w]$, поклавши відповідно до (21) для будь-яких $v, w\in D_A$

$$[v, w]=\iint_\Omega\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dxdy$$

і отримаємо енергетичний простір H_A оператора A вигляду (20), поповнюючи D_A у сенсі збіжності за енергетичною нормою

$$\|v\|_A=\sqrt{[v, v]}=\sqrt{\iint_\Omega\frac{1}{\kappa}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy}.$$

Тоді відповідно до теореми про функціонал енергії [11] задача (17) – (19) за умови $F\in L_2(\Omega)$ має у H_A єдиний (узагальнений) розв'язок v^*, який є точкою мінімуму у H_A функціонала енергії

$$J[v]=\|v\|_A^2-2(F, v)=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{1}{\kappa}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-2Fv\right]dxdy.$$

Наближений розв'язок варіаційної задачі $J[v]\to\inf_{v\in H_A}$ шукатимемо методом Рітца у вигляді $v_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$.

У випадку, зображеному на рис. 1, відповідно до структури (12) координатну послідовність $\{\varphi_k\}$ складатимуть функції

$$\varphi_k=\omega_{1-3}\tau_k-\frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3}+\omega_{2-4}}D_1^{(2-4)}(\omega_{1-3}\tau_k),$$

де змінні x і y замінені за формулами (13), (14), а у випадку, зображеному на рис. 2, відповідно до структури (16) координатну послідовність $\{\varphi_k\}$ складемо з функцій

$$\varphi_k=\begin{cases}\chi_k, & (x,y)\in\Omega_1;\\ \chi_k-\dfrac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1}\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}\chi_k, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$$

де $\chi_k = \omega_{1-3}\tau_k - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3}+\omega_{2-4}} D_1^{(2-4)}(\omega_{1-3}\tau_k)$.

Тут $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна у $L_2(\Omega)$ система функцій (степеневі чи тригонометричні поліноми, сплайни тощо).

Тоді в кожному з цих випадків для визначення сталих c_k, $k = 1, 2, ..., n$, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (систему Рітца)

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j] c_k = (F, \varphi_j), \ j = 1, 2, ..., n,$$

де

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dxdy,$$

$$(F, \varphi_j) = \int_{\Omega} F \cdot \varphi_j \, dxdy, \ k, j = 1, 2, ..., n.$$

Із загальних теорем збіжності метода Рітца [11] випливає збіжність $\{v_n\}$ до v^* як у енергетичній нормі, так і у нормі $L_2(\Omega)$.

Тоді функцію $u^* = \varphi + v^*$ можна розглядати як узагальнений розв'язок задачі (7) – (10), до якого у нормі $L_2(\Omega)$ збігатиметься послідовність наближених розв'язків $\{u_n\}$ цієї задачі, яка формується за правилом $u_n = \varphi + v_n$.

Отже, справджується така теорема.

Теорема. *Нехай* $F \in L_2(\Omega)$. *Тоді послідовність*

$$\psi_n = Q_n u_n,$$

де

$$Q_n = -H' \cdot \left(\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} ds \right)^{-1}, \ u_n = \varphi + v_n,$$

збігається у $L_2(\Omega)$ *до єдиного узагальненого розв'язку задачі* (2) – (6).

5. Висновки. Розглянуто постановку задачі розрахунку стаціонарної фільтраційної течії у кусково-однорідному ґрунті. Для відповідної крайової задачі отримано структуру розв'язку та обґрунтовано застосування методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти.

Отже, отримано подальший розвиток застосування структурного методу (методу R-функцій) у математичному моделюванні фізико-механічних полів, а також вдосконалено метод математичного моделювання фільтраційних течій у частині урахування у чисельному методі додаткового інтегрального співвідношення для знаходження повних витрат рідини та умову спряженості на лінії розділу двох ґрунтів.

Отримані результати можна поширити на інші математичні моделі теорії фільтрації, а також застосувати у розв'язанні прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фільтраційних течій. Це і визначає наукову новизну та практичну значущість отриманих у роботі результатів.

Література: 1. *Блишун А.П., Сидоров М.В.* Метод численного анализа стационарного фильтрационного течения под гидротехническим сооружением в кусочно-однородному грунте // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 5-12. **2.** *Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г.* Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью // Радиоэлектроника и информатика. 2010. № 2. С. 40-46. **3.** *Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г.* Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 1. С. 50-56. **4.** *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. К.: Наук. думка, 2007. 292 с. **5.** *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с. **6.** *Венгерський П.* Про задачу сумісного руху поверхневих і грунтових потоків на території водозбору // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. Вип. 22, 2014. С. 41-53. **7.** *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 264 с. **8.** *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. 416 с. **9.** *Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецький Г.Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1974. 202 с. **10.** *Ляшко Н.И., Великоиваненко Н.М.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1973. 264 с. **11.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 511 с. **12.** *Подгорний О.Р.* Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R-функцій для їх чисельного аналізу // Радіоелектроніка та інформатика. 2018. №1. С. 40-47. **13.** *Подгорний О.Р.* Чисельний аналіз методом R-функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2018. Вип. 18. С. 147-162. **14.** *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с. **15.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **16.** *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с. **17.** *Сидоров М.В., Стороженко А.В.* Математическое компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 4. С. 58-61. **18.** *Темников*

А.В., *Слесаренко А.П.* Современные приближенные аналитические методы решения задач теплообмена. Самара: Изд-во Самар. политехн. ин-та, 1991. 92 с.

Transliterated bibliography:

1. *Blishun A.P.*, *Sidorov M.V.* Metod chislennogo analiza stacionarnogo fil'tracionnogo techenija pod gidrotehnicheskim sooruzheniem v kusochno-odnorodnomu grunte // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 2. Pp. 5-12.

2. *Blishun A.P.*, *Sidorov M.V.*, *Jalovega I.G.* Matematicheskoe modelirovanie i chislennyj analiz fil'tracionnyh techenij pod gidrotehnicheskimi sooruzhenijami s pomoshh'ju // Radiojelektronika i informatika. 2010. № 2. Pp. 40-46.

3. *Blishun A.P.*, *Sidorov M.V.*, *Jalovega I.G.* Primenenie metoda R-funkcij k chislennomu analizu fil'tracionnyh techenij pod gidrotehnicheskimi sooruzhenijami // Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Serija: fiziko-matematichni nauki. 2012. № 1. Pp. 50-56.

4. *Bomba A.Ja.*, *Bulavac'kij V.M.*, *Skopec'kij V.V.* Nelinijni matematichni modeli procesiv geogidrodinamiki. K.: Nauk. dumka, 2007. 292 p.

5. *Vabishhevich P.N.* Metod fiktivnyh oblastej v matemati-cheskoj fizike. M.: MGU, 1991. 156 p.

6. *Vengers'kij P.* Pro zadachu sumisnogo ruhu poverhnevih i gruntovih potokiv na teritorii̇ vodozboru // Visnik L'viv. un-tu. Ser. prikl. matem. ta inf. Vip. 22, 2014. Pp. 41-53

7. *Konnor Dzh.*, *Brebbia K.* Metod konechnyh jelementov v me-hanike zhidkosti. L.: Sudostroenie, 1979. 264 p.

8. *Kravchenko V.F.*, *Rvachev V.L.* Algebra logiki, atomarnye funkcii i vejvlety v fizicheskih prilozhenijah. M.: Fizmatlit, 2006. 416 p.

9. *Ljashko I.I.*, Velikoivanenko I.M., Lavrik V.I., *Mistec'kij G.E.* Metod mazhorantnyh oblastej v teorii fil'tracii. K.: Nauk. dumka, 1974. 202 p.

10. *Ljashko N.I.*, *Velikoivanenko N.M.* Chislenno-analiticheskoe reshenie kraevyh zadach teorii fil'tracii. K.: Nauk. dumka, 1973. 264 p.

11. *Mikhlin S.G.* Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1970. 511 p.

12. *Podgornij O.R.* Matematichni modeli fil'tratsijnikh techij ta zastosuvannya metodu R-funktsij dlya ïkh chisel'nogo analizu // Radioelektronika ta informatika. 2018. № 1. P. 40-47.

13. *Podgornij O.R.* Chisel'nij analiz metodom R-funktsij fil'tratsijnikh techij u neodnoridnomu ґrunti // Matematichne ta komp'yuterne modelyuvannya. Seriya: Fiziko-matematichni nauki. 2018. V. 18. P. 147-162.

14. *Polubarinova-Kochina P.Ja.* Teorija dvizhenija gruntovyh vod. M.: Nauka, 1977. 664 p.

15. *Rektoris K.* Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike i tekhnike. M.: Mir, 1985. 590 p.

16. *Rvachev V.L.* Teorija R-funkcij i nekotorye ejo prilozhenija. K.: Nauk. dumka, 1982. 552 p.

17. *Sidorov M.V.*, *Storozhenko A.V.* Matematicheskoe kom-p'juternoe modelirovanie nekotoryh fil'tracionnyh techenij // Radiojelektronika i informatika. 2004. № 4. Pp. 58-61.

18. *Temnikov A.V.*, *Slesarenko A.P.* Sovremennye priblizhennye analiticheskie metody resheniya zadach teploobmena. Samara: Izd-vo Samar. politekhn. in-ta, 1991. 92 p.

Надійшла до редколегії 05.11.2018

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Литвин О.М.

Подгорний Олексій Русланович, аспірант кафедри прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, метод R-функцій. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: oleksii.podhornyi@nure.ua.

Сидоров Максим Вікторович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної математики ХНУРЕ. Наукові інтереси: математичне моделювання, чисельні методи, математична фізика, теорія R-функцій та її застосування, стохастичний аналіз та його застосування. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Науки, 14, тел. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Podhornyj Oleksii Ruslanovich, postgraduate student of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, R-function’s theory and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: oleksii.podhornyi@nure.ua.

Sidorov Maxim Victorovich, Ph.D. in Physis and Maths, associate professor, associate professor of the Applied Mathematics Department, Kharkov National University of Radioelectronics. Scientific interests: mathematical modeling, numerical analysis, mathematical physics, R-function’s theory and its applications, stochastic analysis and its applications. Address: 14 Nauki ave, Kharkiv, Ukraine, 61166, tel. (057) 7021436. E-mail: maxim.sidorov@nure.ua.